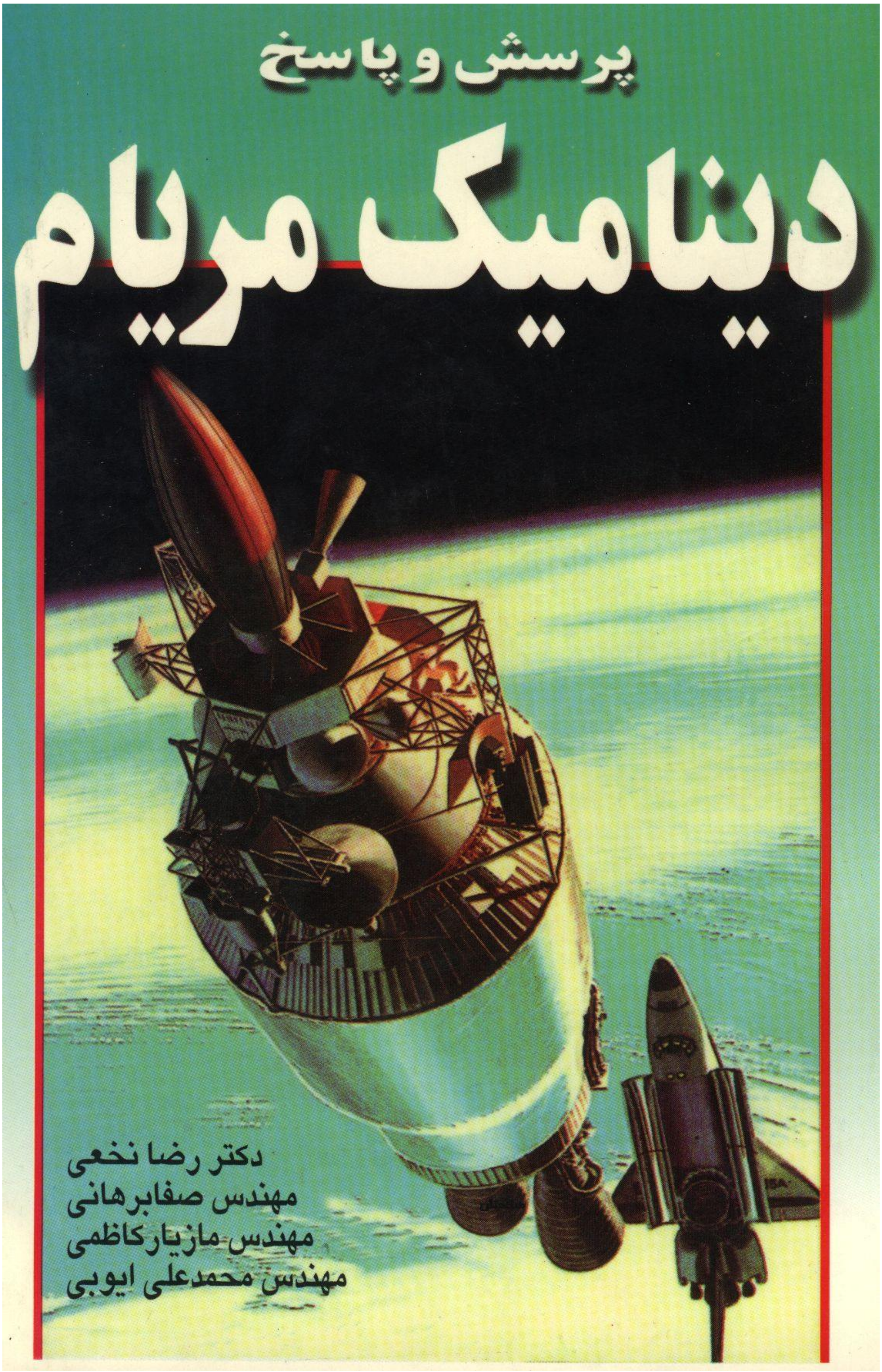
www.collegeprozheh.ir



Prepared Pdf By Rester

www.collegeprozheh.ir

فرگرد یک

آشنایی با دینامیک
Introduction to Dynamics

1.1 - وزن کسی به جرم 85 kg به نیوتن و پوند چیست؟

$W=mg \quad 180(lb)=m(32.2\ ft/s^2) \qquad m=5.59\ slugs$

$180\ lb(4.4482\ N/lb) = 801\ N$

$W=mg \quad 801\ N = m(9.81\ m/s^2) \qquad m=81.6\ kg$

1.2 - وزن آدم در چه بلندی h بر فراز قطب شمال، نیم می‌شود؟ شعاع زمین را R بگیرید.

$mg=(1/2)mg_0 \qquad g_0R^2/(R+h)^2=(1/2)g_0$

Solve for h to obtain $h=(\sqrt{2}-1)R$

1.3 - ماهواره‌ای در بلندی 250 km به گرد زمین می‌چرخد. گرانش g در آنجا چند است؟ وزن سرنشین ماهواره که در پهنای جغرافیایی 45°، 880 N است، چیست؟

$g_h=Gm_e/(R=h)^2=8.57\ m/s^2$

$m=W/g=880/9.81=89.7\ kg$

$W_h=mg_h=89.7\times8.57=768.7\ N$

The term "zero-g" and "Weightless" are definetely misnomers in this instance

1.4 - نیروی خورشید بر کسی به جرم 80 kg در پهنای 45° زمین، چیست؟

Force exerted by sun: $F_s=Gm_sm/r_{es}^2=$

$=6.673\times10^{-11}\cdot5.976\times10^{24}\cdot333000\cdot80/1.496\times10^{112}=0.475\ N$

Force exerted by earth: $F_e=mg=80\times9.81=785\ N$

www.collegeprozheh.ir

1.5 - نیروی کشش بین دو کره آهنی به قطر 100 mm و چسبیده به هم، در چه بلندی با کشش زمین برابر می‌شود؟

Mass of iron sphere $m=\rho V=$

$=(7210\ kg/m^3)(4\pi/3)(0.050)^3=3.78\ kg$

Force of mutual attraction: Gm^2/d^2

Weight of each sphere: $Gm_em/r^2 \Rightarrow Gm^2/d^2=Gm_em/r^2$

$r=d\sqrt{m_e/m}=0.1\sqrt{5.976\times10^{24}/3.78\times10^{-3}}=1.258(10^8)\ km$

1.6 - وزن ناب و وزن نسبت به زمین چرخان برای کسی به جرم 80 kg در پهنای 45° چیست؟

$g_{rel}=9.780327(1+0.005279\ \sin^2\gamma+0.000023\ \sin^4\gamma)$

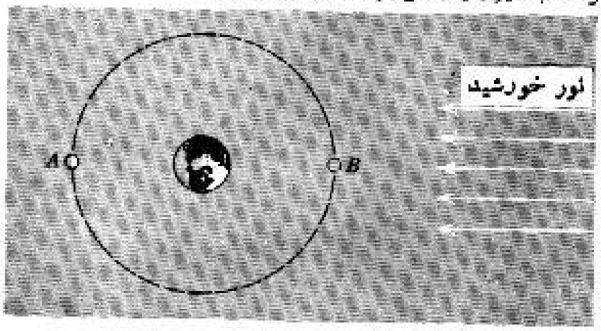
At $\gamma=45^\circ$ $g_{rel}=9.806198\ m/s^2$

$g_{abs}=g_{rel}+0.03382\ \cos^2\gamma=9.823108\ m/s^2$

$W_{abs}=mg_{abs}=(80)(9.823108)=785.8\ N$

$W_{rel}=mg_{rel}=(80)(9.806198)=784.5\ N$

1.7 - نیروی خورشید بر ماه به نیروی زمین بر ماه در A و B چیست؟



نگاره 1.7

Force exerted by earth on moon:

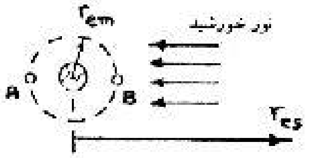
$F_e=Gm_em_m/r^2_{em}=1.984\times10^{20}\ N$

Forces exerted by sun on moon :

$F_{SA}=Gm_sm_m/(r_{es}+r_{em})^2=4.34\times10^{20}\ N$

$F_{SB}=Gm_sm_m/(r_{es}-r_{em})^2=4.38\times10^{20}\ N$

Ratios: $R_A=2.19$ $R_B=2.21$



1.8 - همگن بودن بعدهای معادله زیر را بسنجید.

$mv=\int Fdt \quad [M][LT^{-1}]=[MLT^{-2}][T] \quad MLT^{-1}=MLT^{-1}$

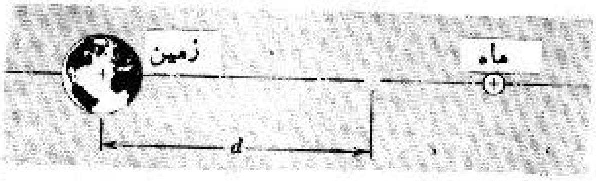
1.9 - اندازه d را چنان بیابید که نیروی گرانش ماه و زمین در آنجا برابر گردد.

$Gm_em/d^2=Gm_mm/(r_{em}-d)^2$

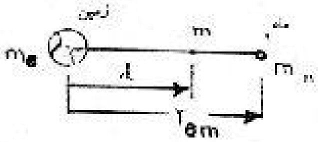
$d^2[m_e-m_m]-d[2r_{em}m_e]+m_er^2_{em}=0$

www.collegeprozheh.ir

$m_e=5.976\times10^{24}$ kg $m_m=0.0123(5.976\times10^{24}$ kg)
$r_{em}=384398000$ m ⇒ d=346022 km =432348 km



نگاره 1.9



1.10 - در چه پهنای جغرافیایی، اندازه g بر زمین چرخان با اندازه g بر استوای زمین ناچرخان برابر است؟

g realtive to nonrotating earth at equator:
$9.780327+0.03382=9.81415$ m/s² Thus,
$9.81415=9.780327(1+0.005279\sin^2\gamma+0.000023\sin^4\gamma)$
Simplify: $0.000023\sin^4\gamma+0.005279\sin^2\gamma-0.00346=0$
⇒ $\sin^2\gamma=0.65318$ $\sin\gamma=0.80820$ $\gamma=53.9^\circ$

www.collegeprozheh.ir

فرگرد دو

سینماتیک ذره
Kinematics of Particles

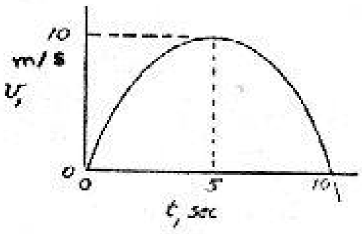
2.1 - ذره‌ای با دستور $s=3+2t^2-(2/15)t^3$ بر خط راست پیش می‌رود. نمودار تندی آن را برای 10 ثانیه بکشید و اندازه شتاب آن را در زمان 0 s، 5 s و 10 s بیابید.

$s=3+2t^2-2/15)t^3 \quad v=\dot{s}=4t-(2/5)t^2$

$a=\dot{v}=4-(4/5)t$

$t=0,\ a_0=4\ m/s^2 \quad t=5\ sec,\ a_5=0$

$t=10\ sec \quad a_{10}=-4\ m/s^2$



2.2 - ذره‌ای با دستور $s=4t^3+3t^2-18t+5$ حرکت می‌کند. شتابش در $v=0$ چیست؟

$s=4t^3+3t^2-18t+5$

$v=\dot{s}=12t^2+6t-18=6(2t^2+t-3)=6(2t+3)(t-1)$

$a=\dot{v}=6(4t+1) \quad v=0 \quad t=1\ s\ (\ t=-3/2\ s)$

$t=1\ sec \quad a=6(4+1)=30\ m/s^2$

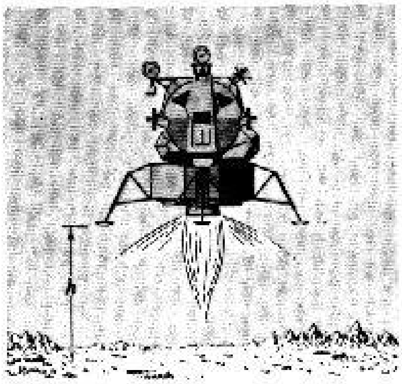
2.3 - ماه‌نشین در $h=6$ m و $v=3$ m/s موتورها را خاموش کرده و بر ماه می‌افتد. تندی برخوردش با ماه چیست؟

$a=9/6 \quad v^2=v_o^2+2as=28.62 \quad v=5.35\ m/s$

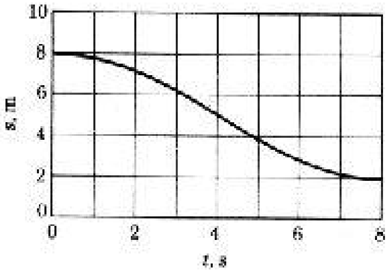
2.4 - ذره‌ای با دستور $\dot{x}=40-3t^2$ حرکت می‌کند. جابه‌جایی آن از $t=2$ s تا $t=4$ s چیست؟

$\dot{x}=40-3t^2 \quad \Delta x=\int_2^4 (40-3t^2)dt=96-72=24\ m$

www.collegeprozheh.ir



نگاره 2.3

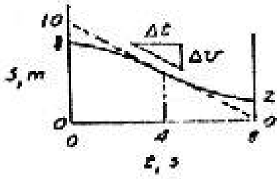


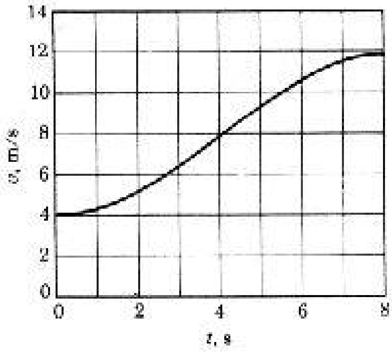
نگاره 2.5

2.5 - نمودار جابه‌جایی-زمان یک ذره را می‌بینید. تندی میانگین و تندی آن در $t=4$ s چیست؟

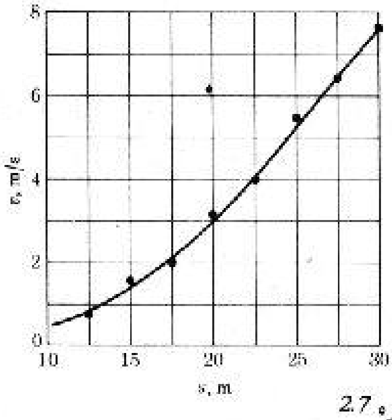
$$v_{Av}=\frac{s_2-s_1}{\Delta t}=-0.75 \text{ m/s}$$

$$v=v_A=ds/dt=-10/8=-1.25 \text{ m/s}$$





نگاره 2.6



نگاره 2.7

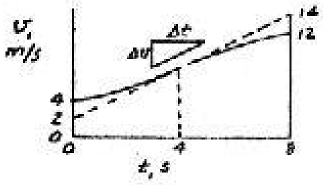
2.6 - نمودار تندی یک ذره را می‌بینید. شتاب میانگین و شتاب در $t=4$ s را بیابید. جابه‌جایی ذره چه اندازه است؟

$$a_{Av}=\Delta v/\Delta t=(12-4)/8=1.00 \text{ m/s}^2$$

$$a_A=dv/dt=(14-2)/8=1.50 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta a=a_A-a_{Av}=1.50-1.00=0.50 \text{ m/s}^2$$

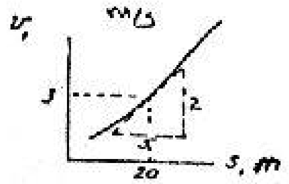
$$\Delta s=\int v dt\simeq(14+2)8/2=64 \text{ m}$$



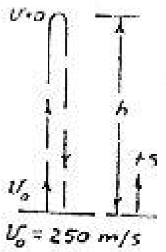
2.7 - شتاب ذره‌ای با نمودار تندی داده شده، در $s=20$ m چیست؟

www.collegeprozheh.ir

a=vdv/ds=3(2/5)=1.2 m/s



2.8 - گلوله‌ای را با تندی آغازین 250 m/s، رو به بالا پرتاب می‌کنیم. گلوله تا چه بلندی h بالا می‌رود؟ پس از چه زمانی گلوله به زمین باز می‌گردد؟

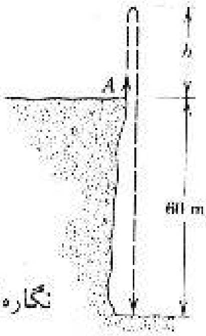


$a=-9.81\ m/s^2 \quad v^2=v_o^2+2a\Delta s \quad 0=(250)^2-2(9.81)h$

$h=62500/(2(9.81))=3190\ m \quad v=v_o+at$

$-250=250-9.81t \quad t=500/9.81=51.0\ s$

2.9 - توپی را از A با تندی 24 m/s به بالا پرتاب می‌کنیم. اندازه بلندی h و زمان رسیدن توپ به زمین چیست؟



نگاره 2.9

$y=v_ot+(1/2)at^2 \quad y=24t-1/2(9.81)t^2$

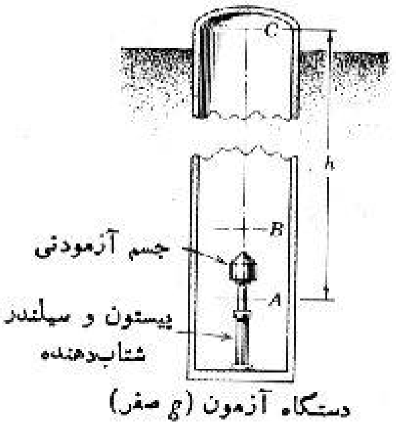
$y=-60\ m \quad -60=24t-4.905t^2$

$4.905t^2-24t-60=0 \quad t=32.93\ s\ (or\ -8.93\ s)$

$\dot{y}=0 \quad v^2=v_o^2+2ay$

$y=h=(0-24^2)/(-2(9.81))=29.4\ m$

2.10 - جسم آزمودنی را از A تا B با شتاب 40 g پیش رانده و رها می‌کنیم. اگر زمان برگشت آن به B 10 ثانیه باشد، h چیست؟



نگاره 2.10

B to C: $t=10/2=5\ s$

$v=v_1+at \quad 0=v_1-9.81(5) \quad v_1=49.0\ m/s$

$v^2=v_o^2+2as \quad 0=(49.0)^2+2(-9.81)h_2$

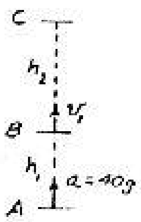
$h_2=122.6\ m$

A to B: $v^2=v_o^2+2as$

$(49.0)^2=0+2(400)(9.81)h_1$

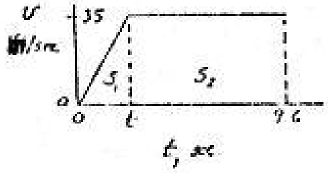
$h_1=3.07\ m$

$h=h_1+h_2=125.7\ m$



www.collegeprozheh.ir

2.11 - دونده‌ای با شتاب یکنواخت در t ثانیه از ایست به تندی 10.5 m/s می‌رسد و با همان تندی، 100 m راه را در 10.5 s می‌دود. زمان t و شتاب میانگین او چیست؟



$v=at \quad \Delta s=\int vdt \quad s_1=(1/2)at^2=1/2vt=(10.5/2)t$

$s_2=v\Delta t=10.5(10.5-t) \quad s_1+s_2=100$ m

$10.5/2t+10.5(10.5-t)=100 \quad 5.25t=10.25$ sec

$t=1.95$ s $\quad a=v/t=10.5/1.95=5.37$ m/sec^2

2.12 - هواپیمایی با شتاب یکنواخت 0.6 g از ایست به تندی 200 km/h رسیده و از زمین بلند می‌شود. زمان t و فاصله s برای این کار چیست؟

$$v^2=v_o^2+2a\Delta s \quad (200(10)^3/(60)^2)^2=0+2(0.6)(9.81)\Delta s$$

$$s=\Delta s=262 \text{ m} \quad v=v_o+at \quad t=\frac{200(10)^3/(60)^2}{0.6(9.81)}=9.44 \text{ s}$$

2.13 - هواپیمایی با تندی 200 km/h بر زمین می‌نشیند و پس از 600 m به تندی 30 km/h می‌رسد. شتاب هواپیما چیست؟

$$\int vdv=\int ads \qquad \int_{200/3.6}^{30/3.6} vdv=a\int_0^{600} ds$$

$$(30^2-200^2)/(2\times 3.6^2)=600a \Rightarrow a=-2.51 \text{ m/s}^2$$

2.14 - ذره‌ای با دستور $v=400\text{-}16t^2$ mm/s حرکت‌می‌کند. جابه‌جایی و مسافت پیموده شده آن در 6 ثانیه نخست چیست؟

$$v=ds/dt=400-15t^2$$

$$\Delta s=\int_0^{\Delta s} ds=\int_0^6 (400-16t^2)dt=1248 \text{ mm} =1.248 \text{ m}$$

$$D=\Delta s_1+|\Delta s_2| \quad \Delta s_1=1333.3 \text{ mm}$$

$$|\Delta s_2|=1\int_5^6 (400-16t^2)dt|=85.3 \text{ mm}$$

$$D=1333.3+85.3=1418.7 \text{ mm} \quad D=1.419 \text{ m}$$

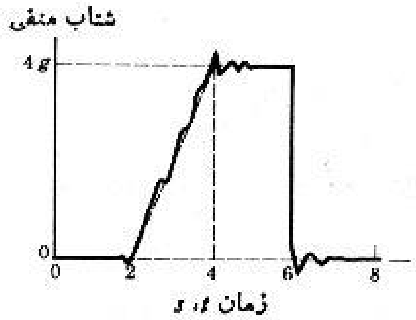
2.15 - نمودار شتاب ذره‌ای راکه در آغاز با تندی 100 m/s پیش می‌رود می‌بینید. تندی آن ذره در $t=4$ s و $t=8$ s چیست؟

$$\Delta v=\int adt=\text{Area under a-t curve}$$

$t=2$ s $\quad v_2-100=-4(9.81)(4-2)/2 \quad v_2=60.8$ m/s

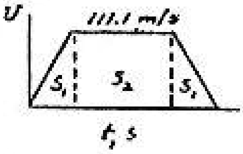
$t=8$ s $\quad v_8-60.8=-4(9.81)(6-4) \quad v_8=-17.72$ m/s

www.collegeprozheh.ir



نگاره 2.15

2.16 -اگر بیشینه و کمینه شتاب، $0.6\ g$ و تندی بیشینه، $400\ km/h$ باشد، کمترین زمان برای پیمودن $10\ km$ راه چیست؟



$400\ km/h = 111.1\ m/s \quad v^2=2as \quad s_1=1049\ m$

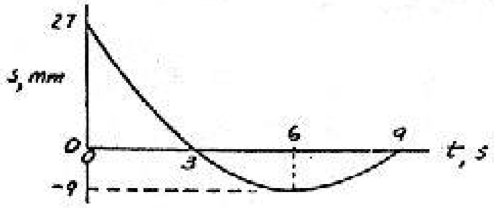
$s_2=10000-2(1040)=7903\ m$

$t_1=v/a=111.1/(0.6(9.81))=18.88\ s$

$t_2=s_2/v=7903/111.1=71.133\ s$

$t=2t_1+t_2=108.9\ s=1.81\ min$

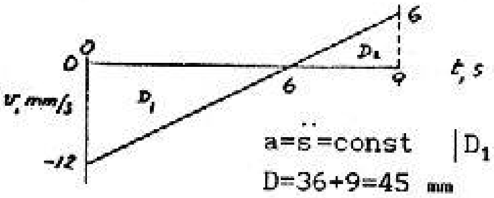
2.17 -ذره‌ای با دستور $s=27-12t+t^2\ mm$ حرکت می‌کند. نمودار s-t و v-t را برای 9 ثانیه نخست بکشید. Δs و مسافت پیموده شده در این زمان چیست؟



$s=27-12t+t^2\ mm \quad v=\dot{s}=-12+2t\ mm/s$

$a=\dot{v}=2\ mm/s^2$

$\Delta s=\int vdt=-27\ mm$

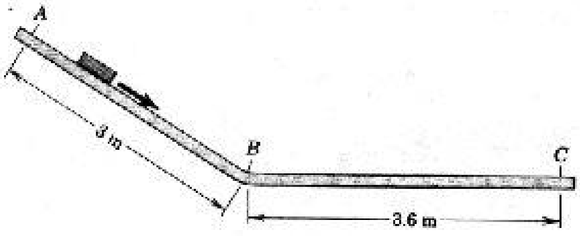


$=1/2(6)(-12)+1/2(3)(6)=-27\ mm$

$a=\ddot{s}=const \quad |D_1|=6(12)/2=36\ mm \quad |D_2|=3(6)/2=9\ mm$

$D=36+9=45\ mm$

2.18 -بسته‌ها با تندی $1.2\ m/s$ از A رها شده و تا B، با شتاب $0.3\ g$ پایین می‌آید. اگر پس از $2.8\ s$ که از A رها شد، در C بایستد، شتاب آنها از B تا C چیست؟ زمان رفتن از B تا C را نیز بیابید.



نگاره 2.18

www.collegeprozheh.ir

A - B

$v_B^2=v_A^2+2a\Delta s=1.2^2+2(0.3)(9.81)(3)=10.269 \quad m^2/s^2$

$v_B=3.2 \ m/s \quad v_B=v_A+at \quad t_B=2.038 \ s$

$\Delta t=t_C-t_B=2.8-2.038=.762 \ sec$

$v_C^2=v_B^2+2a\Delta s \quad 0=10.24+2a(3.6) \quad a=-1.42 \ m/s^2$

2.19 - خودرویی با تندی 120 km/h از A گذشته و پلیس موتورسوار، دو ثانیه پس از آن، از ایست در R به راه می‌افتد. اگر پلیس با 6 m/s^2 به تندی بیشینه 150 km/h برسد و تندیش یکنواخت بماند، کجا به خودرو می‌رسد؟

$s_{car}=vt=(120/3.6)t$

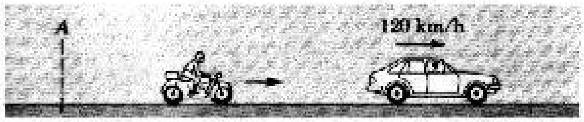
$s_{cycle}=v_{av}t_1+v_{max}t_2=(1/2)(150/3.6)t_1+(150/3.6)t_2$

$t_1=v_{max}/a=150/(3.6(6))=6.94 \ s \quad t_2=t-6.94-2$

$s_{car}=s_{cycle}$

$(120/3.6)t=(75/3.6)6.94+(150/3.6)(t-8.94)$

$t=27.36 \ s \quad s=912 \ m$



نگاره 2.19

2.20 - موشکی با شتاب 6 m/s^2 رو به بالا پرتاب می‌شود. اگر سوخت آن، پس از 20 s پایان یابد، تندی بیشینه و بلندی بیشینه‌ای که به آن می‌رسد، چیست؟

$a=dv/dt \quad v_m=\int adt=at=6(20)=120 \ m/s$

$h=(1/2)at^2=1/2(6)(20)^2=1200 \ m$

$\int_{v_m}^{0} vdv=\int_{0}^{\Delta h} -gdy \quad v_m^2=2g\Delta h \quad \Delta h=120^2/2(9.81)=734 \ m$

$Max.h=1200+734=1934 \ m =1.932 \ km$

2.21 جسم فنر سوار، با دستور $y=y_0 Sin2\pi nt$ می‌لرزد. $v(0.2)$ و $a(0.5)$ در $t=1/(2n)$ چیست؟

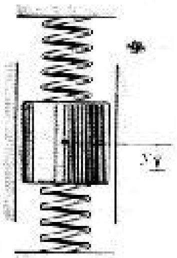
$y=y_0\sin(2\pi nt) \quad v=\dot{y}=2\pi ny_0\cos(2\pi nt)$

$a=\dot{v}=-4\pi^2n^2y_0\sin(2\pi nt) \quad t=1/(2n)$

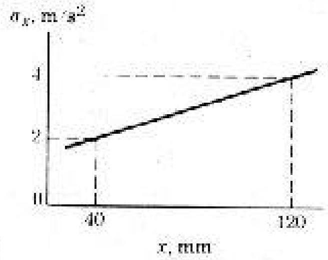
$v=v_{1/2}=2\pi ny_0\cos\pi=-2\pi ny_0 \quad a=a_{1/2}=-4\pi^2n^2y_0\sin\pi=0$

2.22 نمودار شتاب ذره‌ای را بر محور x می‌بینید. اگر تندی آن در $x=40$ mm 0.4 m/s باشد، تندیش در $x=120$ mm چیست؟

www.collegeprozheh.ir



نگاره 2.21



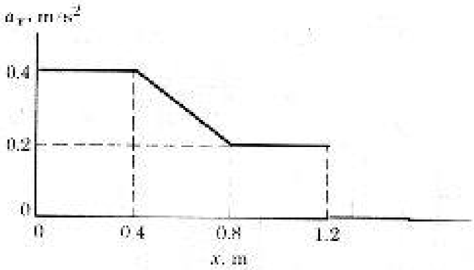
نگاره 2.22

$$\int_{0.4}^{v} v\,dv=\int a_x\,dx \quad 1/2(v^2-0.4^2)=\text{area under } a_x-x \text{ curve}$$

$$Area=\int a_x dx=(a_x)_{av}\Delta x=3(120-40)10^{-3}=0.240 \ m/s^2$$

$$v^2=0.4^2+2(0.240)=0.16+0.48=0.64 \quad v=\sqrt{0.64}=0.8 \ m/s$$

2.23 - نمودار شتاب ذره‌ای را می‌بینید. اگر تندی آن در $x=0$، $0.8 \ m/s$ باشد، تندیش در $x=1.4 \ m$ چیست؟

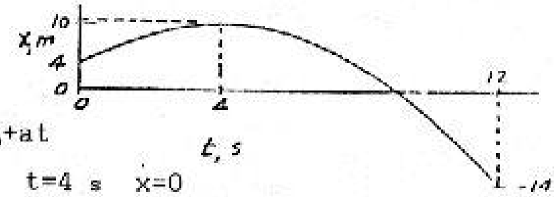


نگاره 2.23

$$\int_{0.8}^{v} v\,dv=\int a\,ds$$

$$v^2-(0.8)^2$$
$$=2[0.4(0.4)+0.3(0.4)+0.2(0.4)]$$
$$v^2=0.64+0.72=1.36$$
$$v=\sqrt{1.36}=1.166 \ m/s \qquad x>1.2 \ m$$

2.24 - ذره‌ای با شتاب یکنواخت و تندی $\dot{x}=3 \ m/s$ از $x=4 \ m$ در $t=0$ به راه می‌افتد و در $t=4 \ s$ به جابه‌جایی بیشینه می‌رسد. جابه‌جایی آن را در $t=12 \ s$ بیابید.



$$x=x_0+v_0t+1/2at^2 \quad v=v_0+at$$

$$t=0 \quad x_0=4 \ m \quad v_0=3 \ m/s \quad t=4 \ s \quad \dot{x}=0$$

$$\Rightarrow x=4+3t+1/2at^2 \ , \ 0=3+4a \quad a=-3/4 \ m/s^2$$

$$\Rightarrow x=4+3t-3/8t^2$$

$$t=12 \ s \quad x=4+3(12)-3/8(12^2)=-14 \ m$$

$$t=4 \ s \quad x=x_{max}=4+3(4)-3/8(4^2)=10 \ m$$

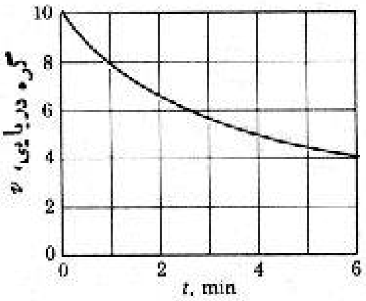
www.collegeprozheh.ir

2.25 - نمودار تندی یک کشتی را می‌بینید. جابه‌جایی آن پس از $t=6$ s چیست؟

$$\Delta s=\int vdt=\sum \Delta t v_{av}=1/60(8.7+7.0+6.0+5.2+4.6+4.2)$$
$$=0.60 \text{ mi(nau)}$$

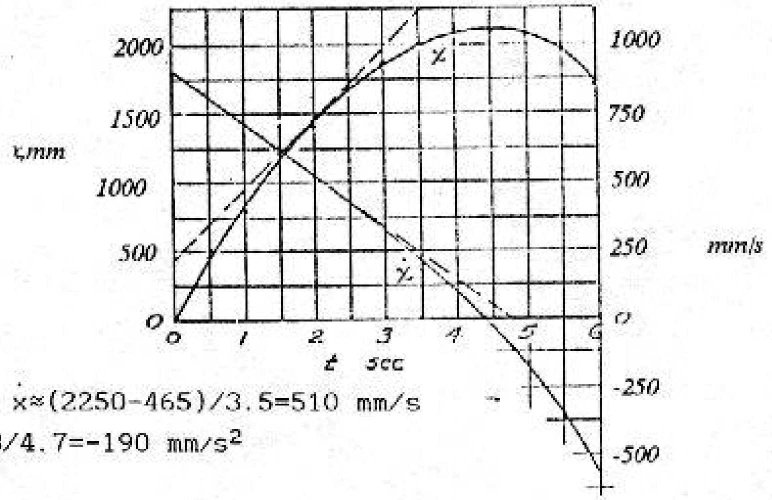
x, mm	t, s	x, mm	t, s
2000	3.5	0	0
2100	4.0	475	0
2075	4.5	800	1.0
		1225	1.5
2050	5.0	1425	2.0
1975	5.5	1700	2.5
1725	6.0	1875	3.0

سیاهه 2.26



نگاره 2.25

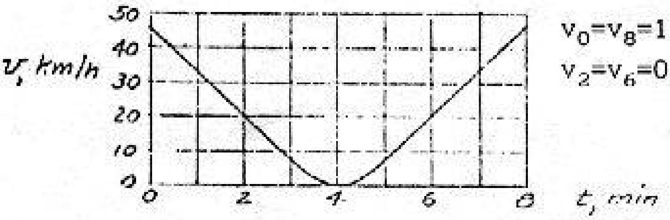
2.26 - ذره‌ای رو به باد پرتاب می‌شود. از داده‌های زیر، تندی و شتاب ذره را در $t=2$ s بیابید.



$t=2$ s $\quad \dot{x}\approx(2250-465)/3.5=510$ mm/s

$\ddot{x}\approx-893/4.7=-190$ mm/s^2

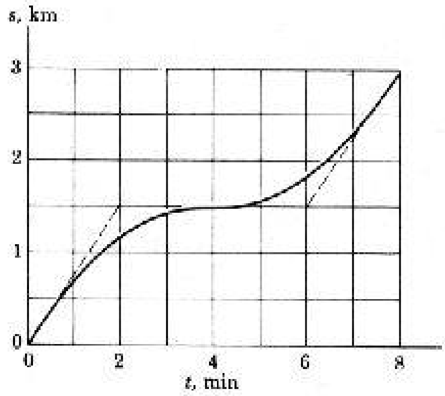
2.27 - از نمودار t-x، نمودار t-v را بکشید.



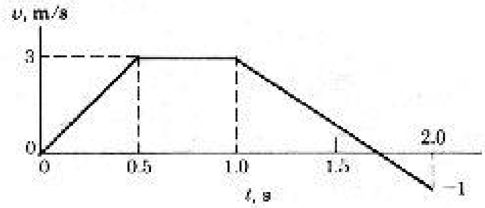
$v_0=v_8=1.5/(2/60)$ km/h $=45$ km/h

$v_2=v_6=0.33(60)=20$ km/h

www.collegeprozheh.ir

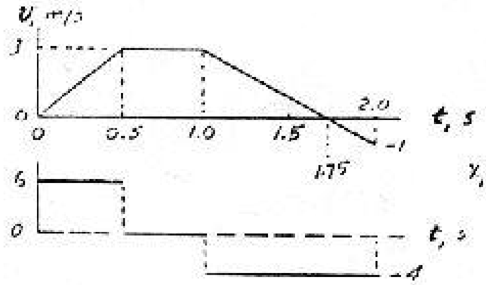


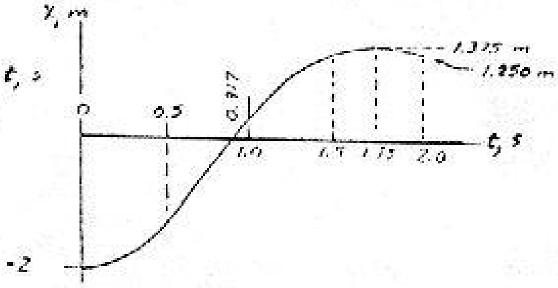
نگاره 2.27



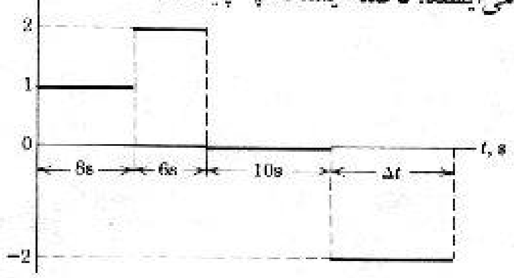
نگاره 2.28

2.28 - ذره‌ای از $x=-2\ m$ راه می‌افتد. نمودار شتاب و جابه‌جایی آن را از روی نمودار تندی بکشید. ذره کی از مبدا می‌گذرد؟





2.29 - نمودار شتاب یک قطار را بین دو ایستگاه می‌بینید. پس از چه زمانی، قطار با شتاب منفی می‌ایستد. فاصله ایستگاهها چیست؟



نگاره 2.29

1st interval $\Delta t=8$ s

$s_8=1/2at^2$ $s_8=1/2(1)(8^2)=32$ m

$v_8=at$ $v_8=1(8)=8$ m/s

2nd interval $\Delta t=6$ s

$\Delta v=\int adt$ $v_{14}-8=2(6)=20$ m/s

$\Delta s=v_0t+1/2at^2=8(6)+1/2(2)(6^2)=84$ m

$s_{14}-32=84$ $s_{14}=116$ m   3rd interval $\Delta t=10$ s $\Delta s=vt$

www.collegeprozheh.ir

$s_{24}-116=20(10)=316$ m

Total interval $\Delta t=10$ s $\Delta v=\int adt$ $0-0=8+12+0-2\Delta t$

4th interval $\Delta s=v_0t+1/2at^2=20(10)+1/2(-2)(10^2)$

$s_{34}-s_{24}=100$ m $s_{34}=s=100+316=416$ m

2.30 - نشان دهید که اگر توان دوم تندی یک ذره، با جابه‌جایی آن متناسب باشد، شتابش یکنواخت است. شتاب یکنواخت a_1 و a_2 را در نمودار زیر بیابید.

$vdv=ads$ $d(v^2)/2=ads$

$\Rightarrow 2a=d(v^2)/ds \Rightarrow a=cte$ if $d(v^2)/ds=cte$

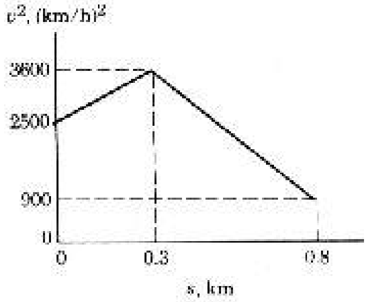
1st interval: $a_1=d(v^2)/2ds$

$=(1/2)(3600-2500)/0.3=1833$ km/h^2 $=0.141$ m/s^2

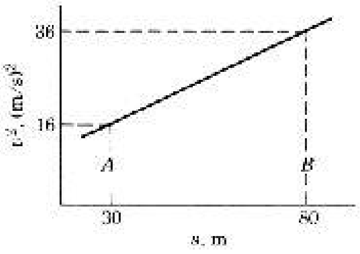
2nd interval:

$a_2=(1/2)(900-2500)/(0.8-0.3)=-1600$ km/h^2

$a_2=(-1600)(1000)/(3600^2)=-0.123$ m/s^2



نگاره 2.30



نگاره 2.31

2.31 - جابه‌جایی ذره‌ای با نمودار حرکت داده شده، در واپسین 2 ثانیه حرکتش چیست؟

$a=vdv/ds=(1/2)d(v^2)/ds=(1/2)\Delta(v^2)/\Delta s=1/5$ m/s^2

$v=v_A+at$ $v=4+(1/5)t$ At B: $6=4+(1/5)t_B$

$t_B=10$ sec $\Delta s=\int vdt=\int_8^{10}(4+1/5t)dt=11.6$ m

2.32 - گلوله‌ای با تندی v_0 در آب شلیک می‌شود. اگر شتاب کاهنده آن cv^n باشد، $v=v(t)$ چیست؟

$a=dv/dt=-cv^n$ $\int_{v_0}^{v}dv/v^n=-c\int_0^t dt$

$-ct=v^{1-n}/(1-n)]_{v_0}^{v}$ $v=[v_0^{1-n}+c(n-1)t]^{1/(1-n)}$

www.collegeprozheh.ir

2.33 - گلوله‌ای با تندی $50\ mm/s$ از $x=225\ mm$ با دستور $v^2=k/s$ پرتاب می‌شود. تندی آن در $t=3\ s$ چیست؟

$v^2=k/s \quad v=\dot{s}=\sqrt{k/s} \quad k=50^2(225)=562500\ mm^3/sec^2$

$ds/v=dt \quad \int_{225}^{s}\sqrt{s}ds=750\int_{0}^{t}dt \quad s^{3/2}=3375+1125t$

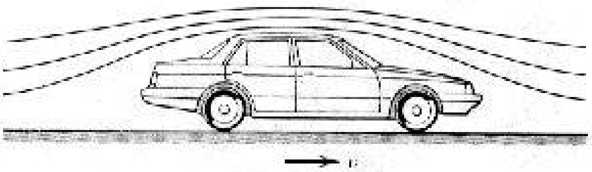
$t=3\ s \Rightarrow s=357.1\ mm \quad v=(562500/357.1)^{1/2}=39.68\ mm$

2.34 - خودرویی با دستور $a=-c_1-c_2v^2$، موتورش را در تندی v_0 خاموش می‌کند. این خودرو تا ایستادن، چه فاصله D حرکت می‌کند؟

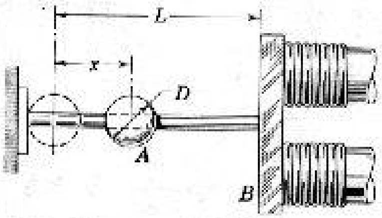
$vdv=adx \quad \int_{0}^{x}dx=\int_{v_0}^{v}vdv/(-c_1-c_2v^2)$

$x=\ln[(c_1+c_2v_0^2)/(c_1+c_2v^2)]/[2c_2]$

$v=0 \quad x=D=\ln[1+(c_2/c_1)v_0^2]/[2c_2]$



نگاره 2.34



نگاره 2.35

2.35 - گلوله آهنی A با شتاب $a=k/(L-x)^3$ از $x=0$ به سوی آهن‌ربای B کشیده می‌شود. تندی رسیدن به آهنربا چیست؟

$vdv=adx \quad \int_{0}^{v}vdv=\int_{0}^{x}k/(L-x)^2\,dx \quad v^2/2=[k/(L-x)]_0^x$

$v^2=2kx/L(L-x) \quad x=L-D/2 \quad v=2\sqrt{k(L-D/2)/LD}$

2.36 - تندی ذره‌ای از $9\ m/s$ در $s=0$ به نزدیک صفر در $s=18\ m$ کاهش می‌یابد. نشان دهید که ذره هیچگاه به $s=18\ m$ نمی‌رسد. شتاب ذره در $s=12\ m$ چیست؟

$v=9-ks \quad 0=9-k(18) \quad k=1/2 \quad \rightarrow v=9-.5s$

$v=ds/dt \quad \Rightarrow \quad ds/dt=9-.5s \quad \int_{0}^{s}ds/(9-.5s)=\int_{0}^{t}dt$

$t=[-2\ln(9-.5s)]_0^s=-2\ln(1-s/18)$

$s=60\ m \quad t=-2\ln(0)=-2(-\infty)=\infty$

$a=dv/dt=d(9-.5s)/dt=-.5ds/dt=-.5(9-.5s)$

$s=12\ m \quad a=-.5(9-12/2)=-1.5\ m/s^2$

www.collegeprozheh.ir

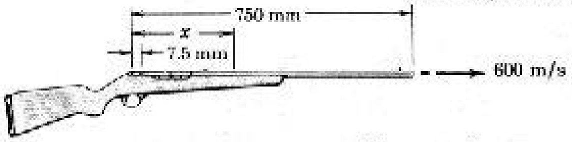
2.37 - خودرویی به جرم m با توان P و شتاب $a=p(mv)$ از تندی v_1 به v_2 می‌رسد. مسافت پیموده‌شده s و زمان t برای این کار چیست؟

$a=p/(mv)$ $\quad p,m=cte$ $\quad vdv=ads$ $\quad vdv=p/(mv)\,ds$

$$\int_{v_1}^{v_2} mv^2dv=p\int_0^s ds \quad s=(m/3p)(v_2^3-v_1^3) \quad dv=adt$$

$$dv=p/mv\ dt \quad m\int_{v_1}^{v_2} vdv=\int_0^t pdt \quad t=(m/2p)(v_2^2-v_1^2)$$

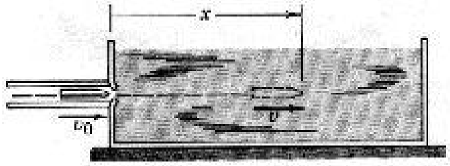
2.38 - گلوله با شتاب $a=k/m$ در لوله تفنگ، از $x=7.5\ mm$ شلیک می‌شود و با تندی $600\ m/s$ از نوک لوله بیرون می‌زند. شتاب گلوله در میانه راه چیست؟



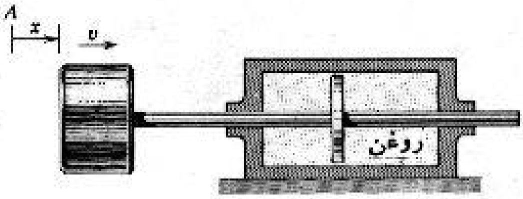
نگاره 2.38

$$a=k/x \quad vdv=k/x\ dx \quad \int_0^v vdv=k\int_{x_1}^x dx/x \quad v^2/2=k\ln(x/x_1)$$

$x=375\ mm$ $\quad a=104.2\ km/s^2$



نگاره 2.40



نگاره 2.41

2.39 - یک هواپیمای آب‌نشین با تندی $160\ km/h$ بر آب می‌نشیند و پس از $400\ m$ به تندی $30\ km/h$ می‌رسد. اگر هواپیما با دستور $a=-Kv^2$ پرواز کند، زمان این فرود و اندازه K چیست؟

$vdv=ads$ $\quad vdv/-kv^2=ds$ $\quad \ln(v_2/v_1)=-ks$

$k=\ln(v_1/v_2)/s=1.073(10^{-3})\ ft^{-1}$

$a=dv/dt$ $\quad -kv^2=dv/dt$ $\quad t=(1/v_2-1/v_1)/k$

$t=25.4\ s$

2.40 - گلوله‌ای با تندی v_0 به درون آب رفته و با دستور $a=-Kv^2$ پیش می‌رود، زمان t و فاصله D برای

www.collegeprozheh.ir

رسیدن به تندی $v_0/2$ چیست؟

$a=-kv^2 \quad vdv=adx \quad x=-\ln v/k]_{v_0}^{v}$

$v=v_0/2 \Rightarrow x=D=\ln 2/k=0.693/k$

$v=dx/dt \quad kx=\ln(v_0/v) \quad v=v_0e^{-kx}$

$\Rightarrow dx/(v_0e^{-kx})=dt \quad t=e^{kx}/kv_0]_0^x=[e^{kx}-1]/kv_0$

$x=D \quad e^{kx}=2 \Rightarrow t=[2-1]/kv_0 \quad t=1/kv_0$

241 - اگر پیستون از $x=0$ با v_0 و $a=-kv$ به راه افتد، دستور $v(t)$ و $x(t)$ و $v(x)$ چیست؟

$a=dv/dt=-kv_1 \quad \ln(v/v_0)=-kt \quad v=v_0e^{-kt}$

$v=dx/dt=v_0e^{-kt} \quad x=v_0[1-e^{-kt}]/k$

$vdv=adx \quad vdv/v=-kdx \quad v=v_0-kx$

242 - گلوله‌ای را به درون بشکه‌ای پر از روغن رها می‌کنیم. اگر دستور پایین افتادن آن $a=g-kv$ باشد، $v(t)$ و $y(t)$ چیست؟

$a=dv/dt \quad a=g-kv \quad -\ln(g-kv)]_0^v/k=t$

$kt=\ln[g/(g-kv)] \quad g/(g-kv)=e^{kt} \quad v=g(1-e^{-kt})/k$

$v=dy/dt \quad y=g[t+(1/k)\ e^{-kt}]_0^t/k$

$y=g[t-(1/k)(1-e^{-kt})]/k$

243 - گلوله‌ای فولادی از بلندی زیاد با شتاب $g-kv^2$ رها می‌شود. تندی بیشینه گلوله و $y(t)$ چیست؟

$a=dv/dt \quad a=g-kv^2 \Rightarrow dv/(g-kv^2)=dt$

$\int_0^v dv/(g-kv^2)=\int_0^t dt \quad 1/\sqrt{kg}\ \tanh^{-1}(v\sqrt{kg}/g)]_0^v=t$

$v=\sqrt{g/k}\ \tanh(\sqrt{kg}\ t) \quad v_{max}=\sqrt{g/k} \quad \int_0^y dy=\int_0^t vdt$

$y=\int_0^t \sqrt{g/k}\ \tanh(\sqrt{kg}\ t)dt \quad y=[\ln(\cosh(\sqrt{kg}\ t))]/k$

244 - ذره‌ای با دستور $a=3.2-0.2v^2\ m/s^2$ به راه می‌افتد. کی و کجا به $v=2\ m/s$ می‌رسد؟

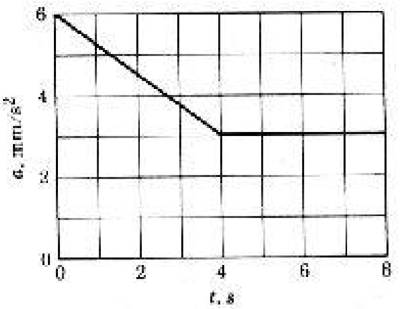
$a=dv/dt \quad \int_0^t dt=\int_0^2 dv/(3.2-0.2v^2)$

www.collegeprozheh.ir

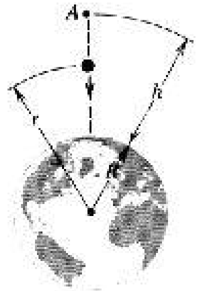
$$t=1/\sqrt{3.2(0.2)}\ \tanh^{-1}(v\sqrt{3.2(0.2)}/3.2)]_0^2=0.687\ s$$

$$vdv=ads \quad \int_0^s ds=\int_0^2 vdv/(3.2-0.2v^2)=0.719\ m$$

2.45 - نمودار شتاب ذره‌ای را که با تندی آغازین $-8\ mm/s$ پیش می‌رود، می‌بینید، تندی آن در $t=8\ s$ و جابه‌جایی‌اش در $t=4\ s$ چیست؟



نگاره 2.45



نگاره 2.47

$$0<t<4\ s \Rightarrow a=6-kt=6-(3/4)t \quad a=dv/dt$$

$$\Rightarrow \int_{-8}^{v} dv=\int_0^t [6-(3/4)t]dt \quad v+8=6t-3t^2/8$$

$$v=-8+6t-3t^2/8 \quad v_4=-8+6(4)-3(4^2)/8=10\ mm/s$$

$$v=ds/dt \quad \int_0^{\Delta s} ds=\int_0^4 (-8+6t-3t^2/8)dt=[-8t+3t^2-t^3/8]_0^4$$

$$\Delta s=[-8(4)+3(4^2)-(4^3)/8]-0=8\ mm$$

$$4<t<8\ s \Rightarrow a=3\ mm/s^2 \Rightarrow \Delta v=a\Delta t \quad v_8-10=3(8-4)$$

$$v_8=22\ mm/s$$

2.46 - خودرویی با شتاب $a=4-(3/4)t$ به راه می‌افتد و پس از رسیدن به تندی بیشینه‌اش، آن را نگه می‌دارد تا $200\ m$ راه بپیماید. زمان پیمودن $100\ m$ چیست؟

$$a=4-(3/4)t\ m/s^2 \quad dv=adt \quad \int_0^v dv=\int_0^{t_1} (4-(3/4)t)dt$$

$$v=4t_1-\frac{3}{8}t_1^2 \quad max.\ v\ at\ a=0 \quad at\ t_1=\frac{16}{3}=5.33\ s$$

$$\Rightarrow v_{max}=32/3\ m/s \quad v=ds/dt$$

www.collegeprozheh.ir

$$\int_0^{s_1} ds=\int_0^{t_1}(4t-(3/8)t^2)dt$$

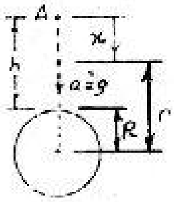
$s_1=2t_1^2-(1/8)t_1^3=2(16/3)^2-(1/8)(16/3)^3=37.93$ m

$s_2=v_{max}t_2 \quad 100-37.93=(32/3)t_2$

$t_2=5.82$ s , $t=t_1+t_2=5.33+5.82=11.15$ s

2.47 - ماهواره‌ای از بلندی h در A به زمین می‌افتد. اگر g متغیر باشد تندی برخورد ماهواره با زمین چیست؟

$g=g_0(R/r)^2 \quad vdv=gdx \quad x=R+h-r$



$$\int_0^{v} vdv=\int_{R+h}^{R} g_0(R/r)^2(-dr)=\left[g_0R^2/r\right]_{R+h}^{R}$$

$$v^2/2=g_0R^2\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]=g_0\cdot\frac{Rh}{R+h} \quad v=\sqrt{2g_0\frac{Rh}{R+h}}$$

2.48 - خودرویی با شتاب یکنواخت به‌راه‌می‌افتد و پس از $60\ m$ به تندی $100\ km/h$ می‌رسد. سپس با شتاب کاهنده‌ای متناسب با تندی، پس از $120\ m$ دیگر به تندی $50\ km/h$ می‌رسد. زمان پیمودن این $180\ m$ چیست؟

$v^2=v_0^2+2as \quad (27.8)^2=0+2a(60) \quad a=6.44\ m/sec^2$

$v=v_0+at \quad v=0+19.36t \quad t_1=4.31$ sec

$vdv=ads \quad a=-kv$

$$\Rightarrow vdv/(-kv)=ds \quad \int_{27.8}^{13.9} dv=-k\int_0^{120} ds \quad k=0.11\ 1/sec$$

$$a=-0.11v \quad a=dv/dt \Rightarrow \int_{27.8}^{v}\frac{dv}{-kv}=\int_{t_1}^{t} dt \quad \frac{1}{0.11}\ln\left(\frac{27.8}{v}\right)=t-t_1$$

$$t=\frac{1}{0.11}\ln(27.8/13.9)+4.31=10.61\ sec$$

2.49 - نمودار شتاب ذره‌ای را که با تندی $3\ m/s$ در $x=0$ پیش می‌رود در زیر کشیده‌ایم. تندی آن در $x=10\ m$ و زمان رسیدن به آن چیست؟

$$vdv=adx \quad \int_{v_0}^{v} vdv=\int_0^{x} adx \quad v=3\ m/s \text{ when } x=10\ m.$$

www.collegeprozheh.ir

$0<x<5$ m. $a=2+kx=2+(3/5)x$ $\int_3^v vdv=\int_0^x (2+(3/5)x)dx$

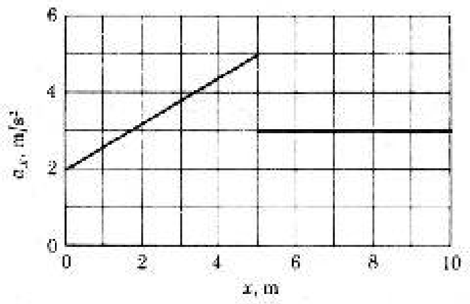
$v=\sqrt{9+4x+(3/5)x^2}$ $v=dx/dt$ $\int_0^{t_5} dt=\int_0^5 dx/\sqrt{9+4x+(3/5)x^2}$

$t_5=1.100$ s

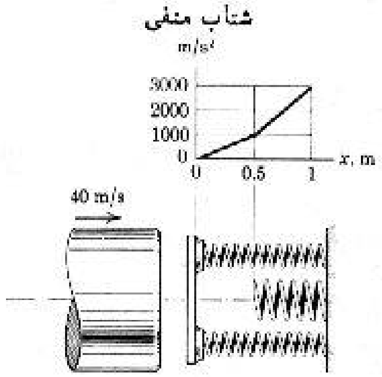
$5<x<10$ $\Delta x=v_5\Delta t+(1/2)a\Delta t^2$ $v_5=\sqrt{9+20+15}=6.63$ m/s

$5=6.63\Delta t+(1/2)(3)(\Delta t)^2$ $\Delta t=0.656$ s (or -5.08 sec)

$\Rightarrow t=t_{10}=t_5+\Delta t=1.100+0.656=1.756$ sec

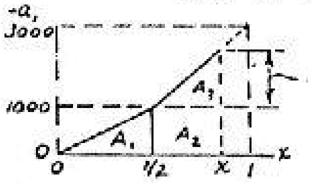


نگاره 2.49



نگاره 2.50

2.50 - گلوله با تندی 40 m/s به ضربه‌گیر می‌خورد. بیشترین فشردگی ضربه‌گیر چیست؟



$\int vdv=\int adx$ $\int_{1600}^{0} dv^2=-2$

$A_1=1000/4=250$ $(m/s)^2$ $A_2=(x-(1/2))1000$

$A_3=2000(x-(1/2))^2$ $A_1+A_2+A_3=2000x^2-1000x+250$

$x^2-0.5x-0.275=0$ $x=0.831$ m $(x>0.5$ m$)$

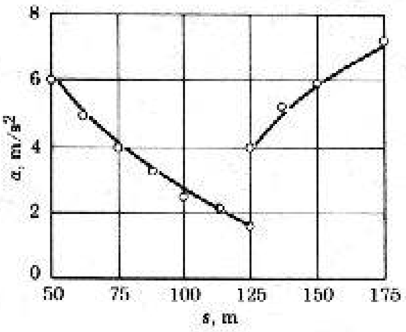
2.51 - اگر تندی خودرویی در s=50 m، 30 km/h باشد، نمودار v-s را بکشید و تندی را در s=175 m بیابید.

$\int_{v_0}^{v} vdv=\int_0^{\Delta s} ads$ $v^2=v_0^2+2\int_0^{\Delta s} ads$ $v_0^2=69.4$ $(m/s)^2$

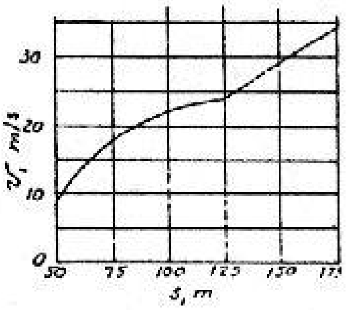
$v_{175}=34.3$ m/s

www.collegeprozheh.ir

نگاره 2.51



Δs m	$\int ads$ $(m/s)^2$	v^2 $(m/s)^2$	v m/s
50-75	125	319	17.9
75-100	83	485	22.0
100-125	50	585	24.2
125-150	125	835	28.9
150-175	170	1175	34.3



2.52 - به یاری دستور $v=v_0e^{-kt}$، داده‌های پرسش 2.25 را برآورد کنید و آن را پاسخ دهید.

$v=v_0e^{-kt}$ $\quad t=0 \Rightarrow v=v_0=10$ knots

$t=6$ min $\Rightarrow v=4=10e^{-6k}$ $\quad 6k=\ln(10/4)=0.9163$

$k=0.1527$ min^{-1} $\quad v=ds/dt$

$$\int_0^s ds=\int_0^t v_0e^{-kt}dt \quad s=v_0(1-e^{-kt})/k$$

$\Rightarrow s=10(1-e^{-0.9163})/(0.1527\times 60)=0.65$ mi/nautical

با دستاورد 0.6 از پرسش 2.25 روبرو کنید.

2.53 - داده‌های پرسش 2.25 را با دستور $v=v_0/(1+v_0kt)$ برآورد کنید و آن را پاسخ دهید.

$v=\dfrac{v_0}{1+v_0kt}$ $\quad t=0 \quad v=v_0=10$ knots

$t=6$ min $=1/10$ hour $\Rightarrow v=4$ knots

$\Rightarrow 4=10/(1+10k/10)$ $\quad k=1.5$ mi^{-1}

$$v=ds/dt \Rightarrow \int_0^s ds=\int_0^t \frac{v_0}{1+v_0kt}dt \quad s=\Big[(1/k)\ln(1+v_0kt)\Big]_0^t$$

$=\ln(2.5)/1.5=0.61$ mi(nautical)

با 0.6 از پرسش 2.25 و 0.65 از پرسش 2.52 روبرو کنید.

www.collegeprozheh.ir

2.54 - موشکی بر قطب شمال، رو به بالا پرتاب می‌شود تا در بلندی $160\ km$ به تندی $16000\ km/h$ برسد و سوختش پایان یابد. این موشک تا کجا بالا می‌رود؟ شعاع زمین در قطب، $6357\ km$ و گرانی آن $9.833\ m/s^2$ است.

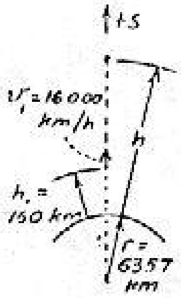
$$a=-g=-g_0r^2/(r+s)^2 \qquad \int_{v_1}^{0} vdv=\int_{h_1}^{h} -g_0r^2/(r+s)^2ds$$

$$v_1^2/2=-g_0r^2/(r+s)\Big]_{h_1}^{h}=g_0r^2\left[\frac{1}{r+h_1}-\frac{1}{r+h}\right]$$

$$\frac{1}{r+h}=\frac{1}{r+h_1}-\frac{v_1^2}{2g_0r^2}=1.285(10^{-4})\ \ 1/km$$

$$\Rightarrow 6357+h=10^4/1.285=7777 \qquad h=1420\ km$$

2.55 - ذره‌ای با دستور $a=kt-k^2x$ از $x=0$ در $t=0$ به راه می‌افتد. $x(t)$ چیست؟



$$a=d^2x/dt^2=Kt-k^2x \qquad d^2x/dt^2+k^2x=Kt$$

$$x=x_t+x_p=A\sin(kt)+B\cos(kt)+(K/k^2)t$$

$$\dot{x}=Ak\cos(kt)-Bk\sin(kt)+(K/k^2)=0$$

$$t=0 \Rightarrow 0=Ak-0+K/k^2\ ,\ A=-K/k^3\ ,\ x=0$$

$$\Rightarrow 0=0+B+0\ ,\ B=0 \Rightarrow x=K(kt-\sin(kt))/k^3$$

2.56 - موشکی با شتاب $a=ke^{-bt}-cv-g$ رو به بالا می‌رود. $v(t)$ چیست؟

$$dv/dt=ke^{-bt}-cv-g \qquad dv/dt+cv=ke^{-bt}-g$$

$$v=Ae^{-ct}+e^{-ct}\int(ke^{-bt}-g)e^{ct}dt=Ae^{-ct}+ke^{-bt}/(c-b)-g/c$$

$$\Rightarrow v=g(e^{-ct}-1)/c+k(e^{-bt}-e^{-ct})/(c-b)$$

2.57 - ذره‌ای به $x=3t^2-4t$ و $y=4t^2-\frac{t^3}{3}$ پیش می‌رود. تندی و شتاب آن در $t=2\ s$ چیست؟

$$x=3t^2-4t \quad \dot{x}=6t-4 \quad \ddot{x}=6\ mm/s^2 \quad y=4t^2-t^3/3 \quad \dot{y}=8t-t^2$$

$$\ddot{y}=8-2t\ mm/s^2\ ,\ t=2\ s \Rightarrow \dot{x}=12-4=8\ mm/s$$

$$\dot{y}=16-4=12\ mm/s \quad v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{8^2+12^2}=14.42\ mm/s$$

$$\theta_x=\tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x})=56.3^\circ \quad \ddot{x}=6\ mm/s^2 \quad \ddot{y}=8-4=4\ mm/s^2$$

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{6^2+4^2}=7.21\ mm/s^2$$

www.collegeprozheh.ir

$$\theta_x=\tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x})=\tan^{-1}(4/6)=33.7^\circ$$

2.58 - تندی و شتاب ذره‌ای با بردار جایگاه زیر چیست؟

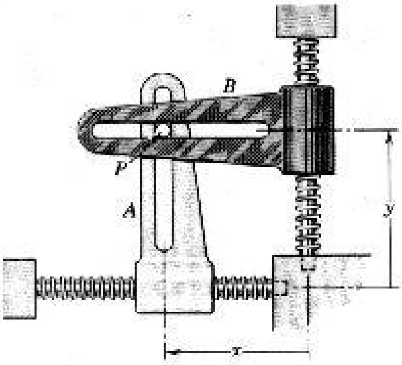
$$\vec{r}=(\frac{2t^3}{3}-\frac{3t^2}{2})\hat{i}+(\frac{t^4}{12})\hat{j}$$

$$r=(\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2)i+\frac{t^4}{12}j\ ,\quad v=\dot{r}=(2t^2-3t)i+\frac{t^3}{3}j\ ,$$

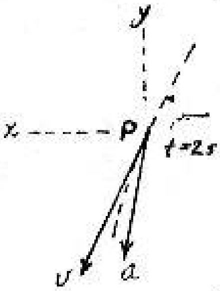
$$a=\dot{v}=(4t-3)i+t^2j\quad t=3\ s\quad v=(18-9)i+9j=9(i+j)\ m/s\ ,$$

$$a=(12-3)i+9j=9(i+j)\ m/s^2\quad v=9\sqrt{2}\ m/s\quad a=9\sqrt{2}\ m/s$$

2.59 - $x=20+\frac{t^2}{4}$ و $y=15-\frac{t^3}{6}$، تندی و شتاب میخ P در $t=2\ s$ چیست؟ مسیر میخ را بکشید و خمیدگی آن را در آن هنگام بیابید.



نگاره 2.59



$$x=20+\frac{t^2}{4}$$

$$\dot{x}=t/2$$

$$\ddot{x}=0.5\ mm/s^2$$

$$y=15-t^3/6$$

$$\dot{y}=-t^2/2\quad \ddot{y}=-t\ mm/s^2$$

$$t=2\ s\Rightarrow \dot{x}=1\ mm/s\quad \dot{y}=-2\ mm/s$$

$$\ddot{x}=1/2\ mm/s^2\quad \ddot{y}=-2\ mm/s^2$$

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=2.24\ mm/s$$

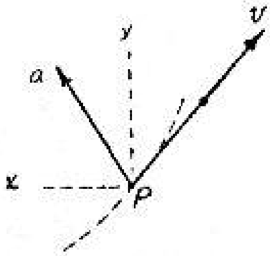
$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{(1/2)^2+(-2)^2}=2.06\ mm/s^2$$

2.60 - اگر در پرسش پیشین $x=30+24Sin(\frac{\pi t}{2})$ و $y=40+32Cos(\frac{\pi t}{2})$ باشد، تندی و شتاب میخ P در $t=2.5\ s$ چیست؟ مسیر حرکت میخ را بکشید و خمیدگی آن را در آن هنگام بیابید.

$$x=30+24\sin(\pi t/2)\qquad y=40+32\cos(\pi t/2)$$

$$\dot{x}=12\pi\cos(\pi t/2)\qquad \dot{y}=-16\pi\sin(\pi t/2)$$

$$\ddot{x}=-6\pi^2\sin(\pi t/2)\qquad \ddot{y}=-8\pi^2\cos(\pi t/2)$$



$$t=2.5\ s\Rightarrow \dot{x}=-12\pi/\sqrt{2}\ mm/s$$

www.collegeprozheh.ir

$\dot{y}=16\pi/\sqrt{2}$ mm/s

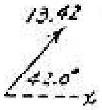
$\ddot{x}=-6\pi^2/\sqrt{2}$ mm/s² $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=20\pi/\sqrt{2}$

$\ddot{y}=-8\pi^2/\sqrt{2}$ mm/s² $a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=10\pi^2/\sqrt{2}$

2.61 - ذره‌ای با دستور $y=4t^3-3t$ و $a_x=12t$ m/s^2 حرکت می‌کند. اگر تندی آن در سوی x در $t=0$ 4 m/s باشد، تندی و شتابش در $t=1$ s چیست؟

$$a_x=12t\ ,\ \int_4^{v_x} dv_x=\int_0^t 12t\,dt\ ,\ v_x=4+6t^2$$

$y=4t^3-3t$, $v_y=\dot{y}=12t^2-3$, $a_y=\ddot{y}=24t$

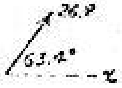


$t=1$ sec $\Rightarrow$ $v_x=10$ m/sec

$v_y=9$ in./sec $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\underline{13.45}$ m/s

$\theta_x=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(9/10)=\underline{42.0^\circ}$

$a_x=12$ in./sec² , $a_y=24$ m/sec²



$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{12^2+24^2}=\underline{26.8}$ m/s²

$a_y=24$ m/sec²

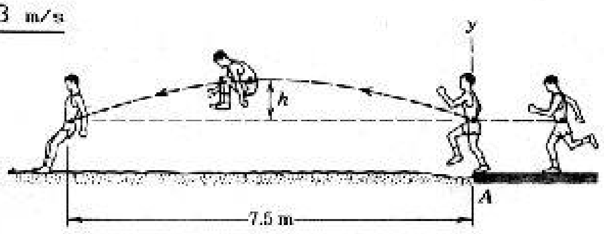
$\theta_x=\tan^{-1}(a_y/a_x)=\tan^{-1}(24/12)=\underline{63.4^\circ}$

2.62 - کمترین تندی u برای آنکه گلوله از A به B برسد چیست؟

$\theta=45^\circ$ $2s=(u^2/g)\sin 2\theta \Rightarrow 12(10^3)=u^2/9.81$

$u=\sqrt{9.81(12000)}=\underline{343}$ m/s

نگاره 2.62



نگاره 2.63

2.63 - تندی دونده در سوی y چه باشد تا از A به B بپرد؟ اندازه h چیست؟ تندی او در سوی x، 10 m/s است.

$2s=(u^2/g)\sin 2\theta=2(u\cos\theta)(u\sin\theta)/g$

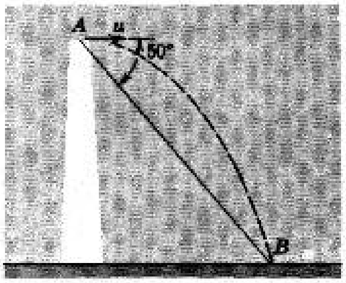
$2s=7.5$ m , $u\cdot\cos\theta=10$ m/sec

$u\sin\theta=v_y \Rightarrow v_y=2sg/(2u\cos\theta)=3.68$ m/s

$h=(u\sin\theta)^2/2g=v_y^2/2g=\underline{0.69}$ m

www.collegeprozheh.ir

2.64 - تندی آغازین u چه باشد تا گلوله پرتاب شده از A، 3.5 ثانیه دیگر، در B به زمین بخورد؟



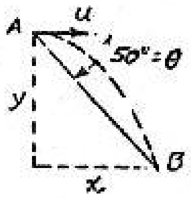
نگاره 2.64

$y=gt^2/2 \quad x=ut$

$\tan\theta=y/x=gt/2u$

$\Rightarrow u=gt/(2\tan\theta)$

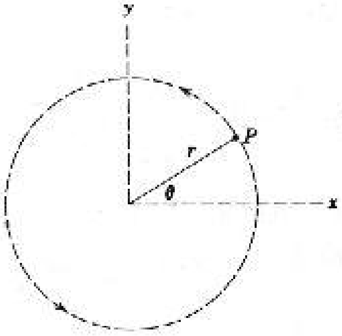
$=\underline{14.41 \text{ m/s}}$

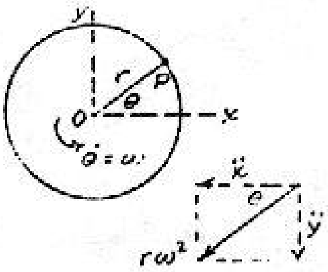


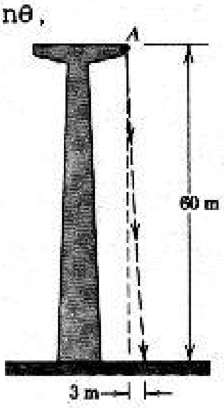
2.65 - نشان دهید که اگر $\dot{\theta}=\omega$ همواره یکنواخت باشد، شتاب P از مرکز دایره می‌گذرد.

$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad \dot{x}=-r\dot{\theta}\sin\theta \quad \dot{y}=r\dot{\theta}\cos\theta$

$\ddot{x}=-r\dot{\theta}^2\cos\theta=-r\omega^2\cos\theta \quad \ddot{y}=-r\dot{\theta}^2\sin\theta=-r\omega^2\sin\theta,$







نگاره 2.65

نگاره 2.66

2.66 گلوله‌ای از A رها می‌شود. باد، شتابی افقی به آن می‌دهد و گلوله در دو متری زیر A به زمین می‌خورد. شتاب و تندی افقی گلوله، به هنگام رسیدن به زمین چیست؟

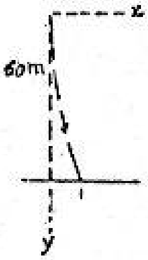
$y=v_{oy}t+a_yt^2/2 \quad 60=0+9.81t^2/2 \quad t^2=120/9.81$

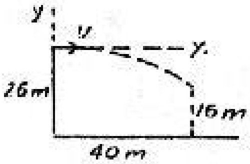
$t=3.5 \text{ s} \quad x=v_{ox}t+a_xt^2/2 \quad 2=0+a_x(3.5)^2/2$

$a_x=4/(3.5)^2=0.33 \text{ m/s}^2$

$v_y=v_{oy}^2+2a_yh \quad v_y=34.3 \text{ m/sec}$

$v_x=v_{ox}+a_xt \quad v_x=\underline{1.15 \text{ m/sec}}$



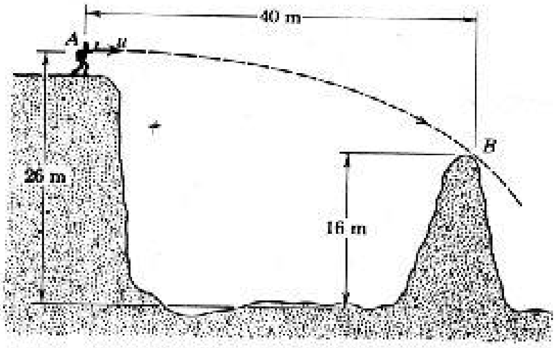


2.67 - پسرک، سنگ را با چه تندی پرتاب کند تا از B بگذرد؟

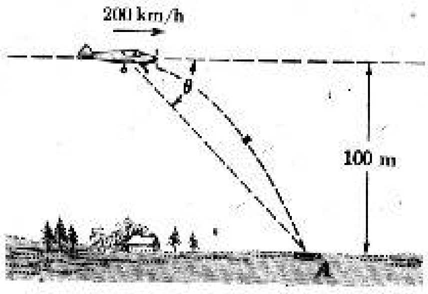
$a_y=-g \Rightarrow y=0-gt^2/2 \quad t=\sqrt{2y/g}=1.428 \text{ s}$

$x=ut \quad u=40/1.428=\underline{28.0 \text{ m/s}}$

www.collegeprozheh.ir

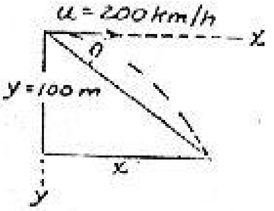


نگاره 2.67



نگاره 2.68

2.68 - زاویه دید θ چه باشد تا بسته رها شده از هواپیما، در A بیفتد؟



y-motion: $a_y=g=9.81\ m/s^2 \quad y=gt^2/2$

x-motion: $a_x=0 \quad x=ut \Rightarrow y=gx^2/(2u^2) \quad x=u\sqrt{2y/g}$

$x=(200/3.6)\sqrt{2(100)/9.81}=251$ m,

$\theta=\tan^{-1}(y/x)=\tan^{-1}(100/251)=\underline{21.7^\circ}$

2.69 - ذره‌ای با دستور $v_y=8t$ m/s و $a_x=4t$ m/s² حرکت می‌کند و به هنگام $t=0$ در $y=2$ m و $x=0$ و $v_x=0$ است. مسیر ذره و تندیش در $x=18$ m چیست؟

$v_y=\dot{y}=8t \quad y=4t^2+c_1 \quad y=2$ m

$t=0 \Rightarrow c_1=2 \quad y=4t^2+2$ m $\quad a_x=\ddot{x}=4t \quad \dot{x}=2t^2+c_2$

$\dot{x}=0$ ، $t=0 \Rightarrow c_2=0 \quad x=2t^3/3+c_3$ m

$x=0$, $t=0 \Rightarrow c_3=0$

$y=4\sqrt[3]{9x^2/4}+2 \quad \underline{(y-2)^3=144x^2}$

$x=18$ m $\quad 2t^3/3=18 \quad t^3=27 \quad t=3$ sec

$\Rightarrow \dot{x}=2(3)^2=18$ m/sec

$\dot{y}=8(3)=24$ m/sec $\quad v=\sqrt{18^2+24^2}=\underline{30\ m/s}$

2.70 - شیار عمودی با تندی 20 mm/s به راست می‌رود. تندی و شتاب میخ P در $x=60$ mm چیست؟

$\dot{x}=20$ mm/s $\quad \ddot{x}=0 \quad y=x^2/160 \quad \dot{y}=x\dot{x}/80$

$\ddot{y}=(\dot{x}^2+x\ddot{x})/80$

$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{\dot{x}^2+(x\dot{x}/80)^2}=\dot{x}\sqrt{1+(x/80)^2} \qquad x=60$ mm $\quad \underline{v=25\ mm/s}$

www.collegeprozheh.ir

$a=\ddot{y}=\dot{x}^2/80 \quad \ddot{x}=0 \quad a=(20)^2/80=5\ mm/s^2$

2.71 - اگر شیار عمودی پرسش 2.70 با دستور $x=60\sin\pi t$ حرکت کند، تندی و شتاب میخ P در $t=0.5\ s$ چیست؟

$x=60\sin\pi t \quad \dot{x}=60\pi\cos\pi t \quad \ddot{x}=-60\pi^2\sin\pi t$

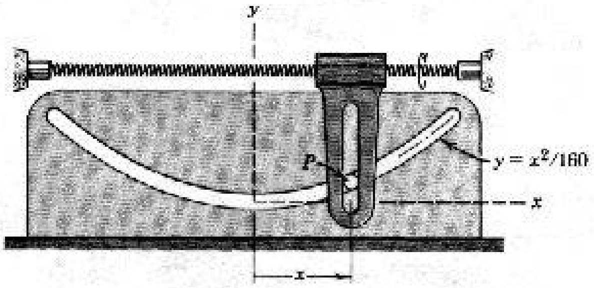
$y=x^2/160 \quad \dot{y}=x\dot{x}/80=3600\pi\sin\pi t\cos\pi t$

$\ddot{y}=(\dot{x}^2+x\ddot{x})/80=45\pi^2(1-2\sin^2\pi t)$

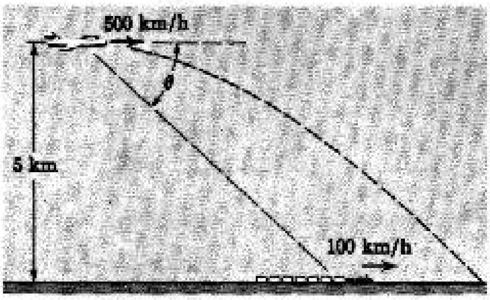
$t=1/2 \quad \dot{x}=60\pi\cos(\pi/2)=0 \quad \dot{y}=0 \quad v=0$

$\ddot{x}=-60\pi^2 mm/s^2 \quad \ddot{y}=45\pi^2(1-2)=-45\pi^2 mm/s^2,$

$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{(-60\pi^2)^2+(-45\pi^2)^2}=75\pi^2\ mm/s^2$

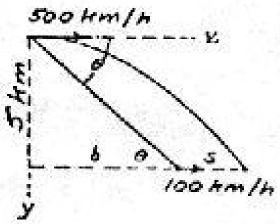


نگاره 2.70



نگاره 2.72

2.72 - زاویه دید θ چه باشد تا هواپیما، قطار را بزند؟



$h=gt^2/2 \quad t=\sqrt{2(5000)/9.81}=31.9\ s$

$s=vt=(100/3.6)/31.9=887\ m$

$b+s=ut=(500/3.6)31.9=4434\ m$

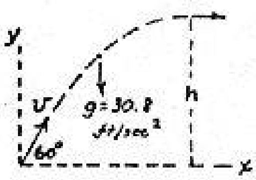
$b=4434-887=3547\ m$

$\theta=\tan^{-1}(5000/3547)=54.6^\circ$

2.73 - سوخت موشکی در آرایش نشان‌داده، پایان می‌یابد. موشک تا چه بلندی و تا چه زمانی، بالا

www.collegeprozheh.ir

می‌رود؟ $g=9.3\ m/s^2$.



$v=1000\ km/hr = 278\ m/sec \quad a_y=-9.3\ m/sec^2$

$v_y=v_{y_0}+at \quad 0=278\sin 60^\circ-9.3t \quad \underline{t=25.9\ s}$

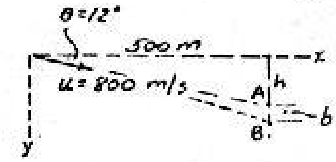
$v_y^2=v_{y_0}^2+2ay$

$0=(278\sin 60^\circ)^2-2(9.3)h \quad h=3116\ m$

نگاره 2.73

نگاره 2.74

2.74 - گلوله با تندی $800\ m/s$ رو به A شلیک می‌شود. اندازه افت b چیست؟

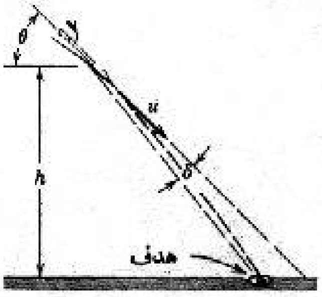


$h=500\tan 12^\circ=106.3\ m$

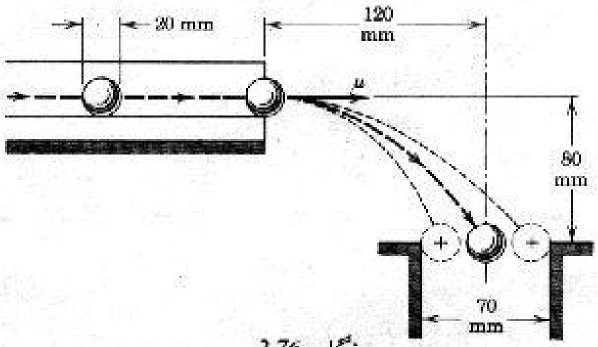
$y=x\tan\theta+(gx^2/2u^2)\sec^2\theta \quad y=h+b=b+x\tan\theta$

$x=500\ m \Rightarrow b=(gx^2/2u^2)\sec^2\theta=$

$=9.81(500)^2/(2(800)^2)\sec^2 12^\circ=2.00\ m$

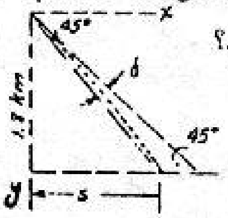


نگاره 2.75



نگاره 2.76

2.75 - هواپیمایی که با زاویه $\theta=45^\circ$ شیرجه می‌رود موشکی در بلندی $h=1.8\ km$ با تندی $u=1000\ km/h$ آتش می‌کند. زاویه δ چه باشد تا موشک به هدف بخورد؟



$y=ut\sin 45^\circ+gt^2/2 \quad u=1000/3.6=278\ m/s$

$1800=278(0.707)t+9.81t^2/2$

$\Rightarrow t=7.69\ s\ ,\ (t=-47.7\ s)$

www.collegeprozheh.ir

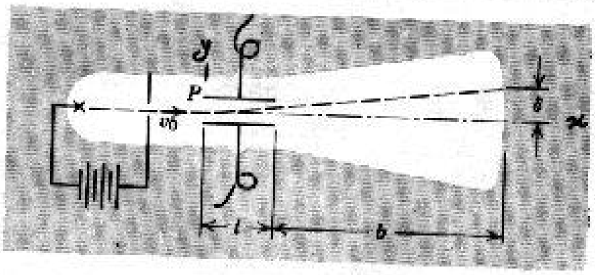
$s=ut\cos45^\circ=278(7.69)(0.707)=1510$ m
$\tan(\pi/4-\delta)=1510/1800=0.8389$
$\pi/4-\delta=39.99^\circ$, $\delta=45^\circ-39.99^\circ=\underline{5.01^\circ}$

2.76 - کمینه و بیشینه u چه باشد تا گلوله به درون سوراخ بیفتد؟

$x=ut \quad y=gt^2/2 \quad x=u\sqrt{2y/g} \quad u=x\sqrt{g/2y}$
$x_{max}=120+35-10=145$ mm
$x_{min}=120-35+10=95$ mm
$u_{max}=0.145\sqrt{9.81/(2(0.080))}=\underline{1.135\text{ m/s}}$
$u_{min}=0.095\sqrt{9.81/(2(0.080))}=\underline{0.744\text{ m/s}}$

2.77 - صفحه P به الکترونی که با v_0 پرتاب می‌شود، شتاب eE/m می‌دهد. اندازه δ چیست؟

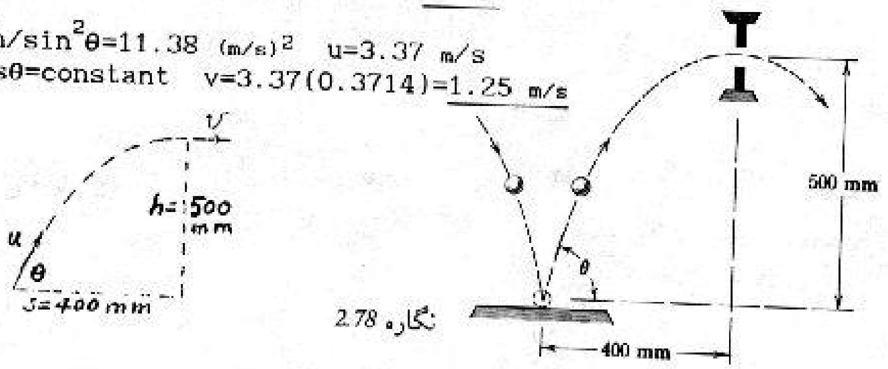
$t=l/v_o$, $v_x=v_c=cte$ $\quad v_y=a_yt=eEl/(mv_o)$
$y=a_yt^2/2=eEl^2/(2mv_o^2)$ $\quad$ Al$\Rightarrow$ $\delta-y/b=v_y/v_x$ $\Rightarrow$
$\delta=eEl^2/(2mv_o^2)+beEl/(mv_o^2)$ $\quad$ $\underline{\delta=eEl(l/2+b)/(mv_o^2)}$



نگاره 2.77

2.78 - زاویه θ و تندی گلوله در گذر از سوراخ چیست؟

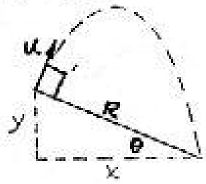
$h=u^2\sin^2\theta/(2g) \quad s=u^2\sin(2\theta)/(2g)$
$\Rightarrow h/s=\sin^2\theta/\sin(2\theta)=(1/2)\tan\theta$
$\theta=\tan^{-1}(2h/s)=\tan^{-1}(2(500)/400)=\underline{68.2^\circ}$
$u^2=2gh/\sin^2\theta=11.38\ (\text{m/s})^2 \quad u=3.37$ m/s
$v=u\cos\theta=\text{constant} \quad v=3.37(0.3714)=\underline{1.25\text{ m/s}}$



نگاره 2.78

www.collegeprozheh.ir

2.79 - اندازه برد R چیست؟

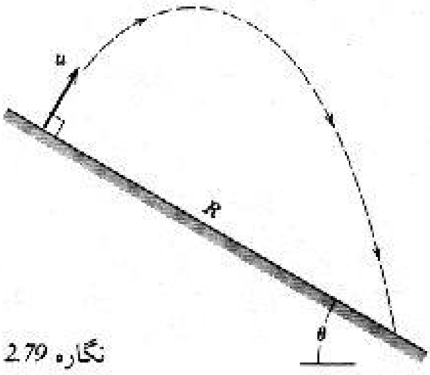


$y = R\sin\theta = -ut\cos\theta + gt^2/2 \quad x = R\cos\theta = ut\sin\theta$

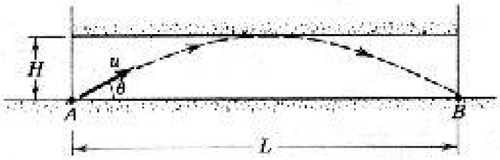
$\Rightarrow R\sin\theta = -R\cos^2\theta/\sin\theta + g(R\cos\theta/u\sin\theta)^2/2$

$1/\sin\theta = gR/(2u^2\tan^2\theta)$

$R = 2u^2\tan^2\theta/(g\sin\theta) = \underline{2u^2\tan\theta\sec\theta/g}$



نگاره 2.79



نگاره 2.80

2.80 - اندازه θ و u چه باشد تا گلوله پرتاب شده از A بدون برخورد با سقف، به B برسد؟

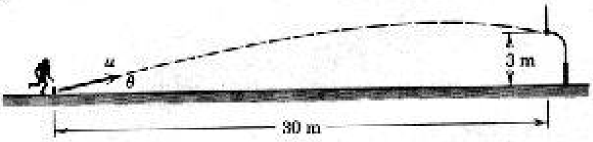
$H = (u\sin\theta)^2/(2g) \quad L = 2s = u^2\sin 2\theta/g$

$\Rightarrow H/L = \sin^2\theta/(2\sin 2\theta) = (1/4)\tan\theta$

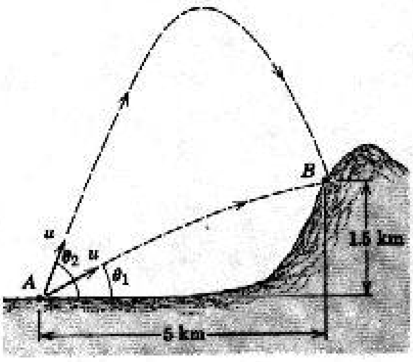
$\Rightarrow \underline{\theta = \tan^{-1}(4H/L)} \quad \sin\theta = \sqrt{2gH}/u$

$Lg/u^2 = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = (2/u)\sqrt{2gH(1-2gH/u^2)}$

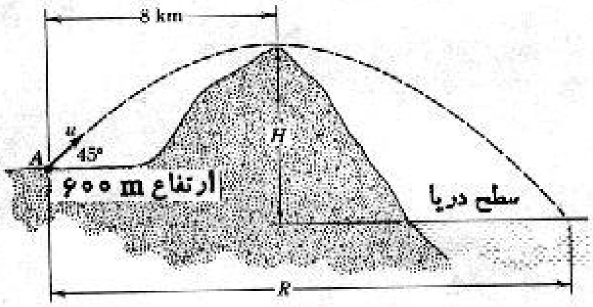
$\Rightarrow u = \sqrt{2gH}\sqrt{1+(L/4H)^2}$



نگاره 2.82



نگاره 2.81



نگاره 2.83

www.collegeprozheh.ir

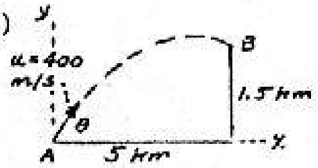
2.81 - اگر گلوله با $u=400$ m/s از A پرتاب شود، زاویه θ چه باشد تا به B برسد؟

$y=x\tan\theta-gx^2/(2u^2)\sec^2\theta=x\tan\theta-gx^2/(2u^2)(1+\tan^2\theta)$

$1500=5000\tan\theta-9.81(5000)^2/(2(400)^2)(1+\tan^2\theta)$

$\tan^2\theta-6.524\tan\theta+2.957=0$

$\Rightarrow\ \underline{\theta_1=26.1^\circ}\qquad \underline{\theta_2=80.6^\circ}$



2.82 - اگر بازیکن، توپ را با 30 m/s بزند، کمینه θ چه باشد که توپ، گل شود؟

$y=x\tan\theta-gx^2/(2u^2)\sec^2\theta$

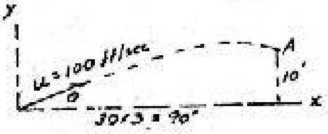
$m=\tan\theta\ ,\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+m^2$

$y=xm-gx^2(1+m^2)/(2u^2)\ ,$

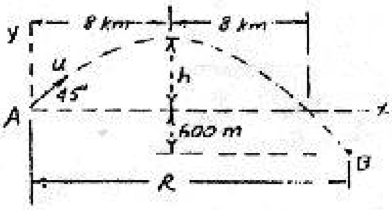
$m^2-(2u^2/gx)m+(1+(2u^2y/gx^2))=0$

A: $m^2-6.901m+1.7668=0\quad m=0.266\ ,\ 6.635$

$\theta=\tan^{-1}m=\underline{14.91^\circ}(\ 81.4^\circ)$



2.83 - اندازه u و H و R چیست؟



$2s=u^2\sin2\theta/g\ \Rightarrow\ 16(10^3)=u^2\sin90^\circ/9.81$

$u=\sqrt{157000}=\underline{396\ \text{m/s}}\qquad h=(u\sin\theta)^2/2g$

$H=h+600=4000+600=4600$ m

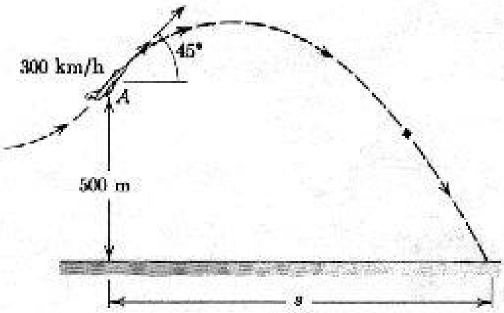
$y=ut\sin\theta-gt^2/2\qquad -600=396(0.707)t-9.81t^2/2$

$t^2-57.11t-122.3=0\qquad t=59.18\ \text{s}\ ,(-2.07\ \text{s})$

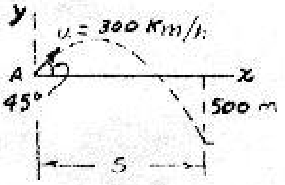
$x=ut\cos\theta\qquad R=396(59.18)\cos45^\circ=16579$ m

$\underline{R=16.58\ \text{km}}$

2.84 - هواپیما در R، بسته‌ای را رها می‌کند. برد s و زمان رسیدن به زمین چیست؟



نگاره 2.84



$u=300/3.6=83.33$ m/s

$s=ut\cos\theta=83.33(0.7071)t=58.93t$

$y=ut\sin\theta+a_yt^2/2$

$-500=83.33t(0.7071)+(-9.81)t^2/2$

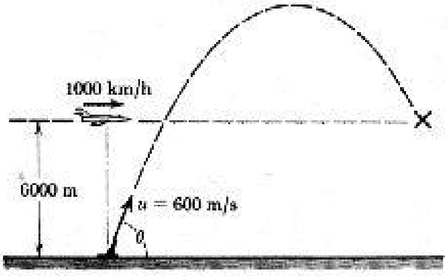
www.collegeprozheh.ir

$t^2-12.01t-101.94=0 \quad t=17.75\ s\ ,(-5.74\ s)$
$s=58.93(17.75)=1046.2\ m\ , \quad \underline{s=1.046\ km}$

2.85 - زاویه θ چه باشد که گلوله به هواپیما بخورد؟ زمان این برخورد چیست؟

$x=ut=88ut \quad x=utcos\theta=2000tcos\theta$
$\Rightarrow 880t=2000tcos\theta$
$\theta=cos^{-1}(880/2000)=\underline{63.9^\circ}$

$h=utsin\theta-gt^2/2 \quad t^2-(2usin\theta/g)t+2h/g=0$
$t=usin\theta/g \pm\sqrt{(usin\theta/g)^2-2h/g}$
$usin\theta/g=1242\ sec^2$
$t=55.8\pm43.2 \quad t=12.5\ sec\ , \quad \underline{t=99.0\ sec}$

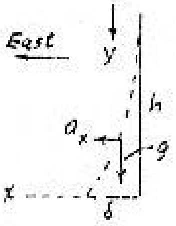


نگاره 2.85

نگاره 2.86

2.86 - گلوله‌ای که از A رها می‌شود، از برای چرخش زمین، شتابی به اندازه $2v_y\omega Cos\gamma$ به سوی شرق می‌گیرد که ω تندی چرخشی زمین و γ عرض شمالی است. δ چیست؟

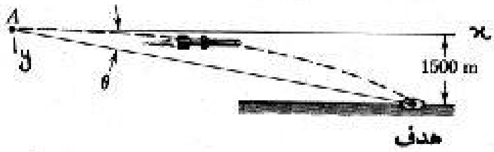
$a_y=g \quad v_y=gt \quad a_x=2v_y\omega cos\gamma=2gt\omega cos\gamma$
$\dot{x}=\int_0^t a_x dt=gt^2\omega cos\gamma \quad x=\int_0^t \dot{x}dt=gt^3\omega cos\gamma/3=\delta$
$h=gt^2/2 \Rightarrow \delta=(2h/g)^{3/2}(g\omega/3)cos\gamma$
$\delta=(2\sqrt{2}/3)\omega h\sqrt{h/g}cos\gamma$



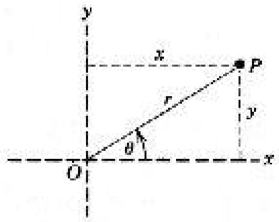
2.87 - موشکی با شتاب $0.5g$ از هواپیمایی با تندی $1000\ km/h$ پرتاب می‌شود. θ چه‌باشد که به هدف بخورد؟

$\ddot{x}=0.5g \quad \dot{x}=u+0.5gt \quad x=ut+(1/2)(0.5g)t^2$
$\ddot{y}=g \quad \dot{y}=gt \quad y=gt^2/2 \quad t=\sqrt{2y/g}=\sqrt{2h/g}$
$x=s=u\sqrt{2h/g}+(1/4)g(2h/g)=u\sqrt{2h/g}+h/2$
$\theta=tan^{-1}(h/5)=tan^{-1}(h/(u\sqrt{2h/g}+h/2))$
$=tan^{-1}(0.2777)=\underline{15.5^\circ}$

www.collegeprozheh.ir



نگاره 2.87



نگاره 2.88

2.88 - بردار جایگاه P با $\bar{r}=(b_1 Cos\theta)\hat{i}+(b_2 Sin\theta)\hat{j}$ نشان می‌شود. اگر θ یکنواخت باشد نشان دهید که P بر یک بیضی حرکت می‌کند و شتابش به سوی O است.

$\underline{r}=(b_1\cos\theta)\underline{i}+(b_2\sin\theta)\underline{j}$

$\dot{\underline{r}}=(-b_1\dot{\theta}\sin\theta)\underline{i}+(b_2\dot{\theta}\cos\theta)\underline{j}$

$\ddot{\underline{r}}=(-b_1\dot{\theta}^2\cos\theta)\underline{i}+(-b_2\dot{\theta}^2\sin\theta)\underline{j}=$

$=-\dot{\theta}^2[(-b_1\cos\theta)\underline{i}+(b_2\sin\theta)\underline{j}]$

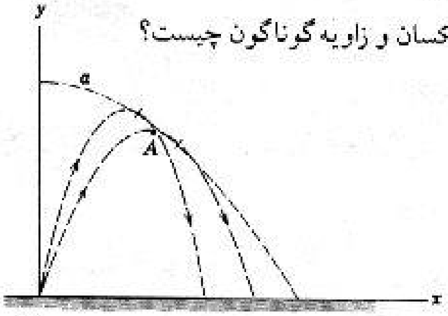
$\underline{a}=\ddot{\underline{r}}=-\dot{\theta}^2\underline{r} \Rightarrow a=|\underline{a}|=r\dot{\theta}^2$

$x=b_1\cos\theta \quad y=b_2\sin\theta \Rightarrow \cos^2\theta=(x/b_1)^2$

$\sin^2\theta=(y/b_2)^2 \quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1=(x/b_1)^2+(x/b_2)^2$

ellipse with semi axes b_1& b_2

2.89 - دستور پوش a برای پرتابه‌ای با تندی یکسان و زاویه گوناگون چیست؟



نگاره 2.89

$y=x\tan\theta-(gx^2/2u^2)\sec^2\theta$

$m=\tan\theta \quad \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+m^2$

$\Rightarrow y=mx-(gx^2/2u^2)(1+m^2)$

$m^2-(2u^2/gx)m+(1+2u^2y/gx^2)=0$

$(2u^2/gx)^2-4(1+2u^2y/gx^2)=0$

$\Rightarrow \underline{y=(u^2/2g)-(gx^2/2u^2)}$

2.90 - ذره‌ای به دایره‌ای به شعاع 0.3 m می‌چرخد. اندازه شتاب آن را، (a) برای تندی یکنواخت 0.6 m/s و (b) برای تندی 0.6 m/s که با آهنگ 0.9 m/s^2 افزایش می‌یابد، بیابید.

$a_n=v^2/r=(0.6)^2/0.3=1.2$ m/s^2

(a) $a_t=\dot{v}=0 \Rightarrow \underline{a=a_n=1.2 \text{ m/s}^2}$ (b) $a_t=\dot{v}=0.9$ m/s^2

www.collegeprozheh.ir

$$\Rightarrow \quad a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{(1.2)^2+(0.9)^2} \qquad \underline{a=1.5 \ m/s^2}$$

2.91 - ذره‌ای با شتاب $10 \ m/s^2$ بر مسیر دایره‌ای به شعاع $2 \ m$ می‌چرخد و اندازه تندیش بر دایره، با آهنگ $6 \ m/s^2$ افزایش می‌یابد. اندازه تندیش چیست؟

$$a_n=v^2/r=\sqrt{a^2-a_t^2} \quad v^2=2\sqrt{(10)^2-(6)^2}=2(8)=16 \ m/s^2$$
$$\underline{v=4 \ m/s}$$

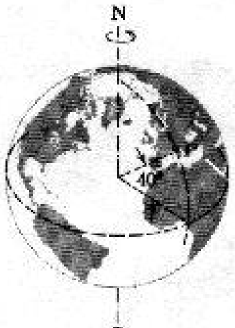
2.92 - خودرویی از یک پیچ با شعاع $300 \ m$ می‌گذرد. بیشترین تندی آن چه باشد که شتابش از $0.8g$ فراتر نرود؟

$$a_n=v^2/\rho \qquad v=\sqrt{\rho a_n}=\sqrt{300(0.8)(9.81)}=48.52 \ m/sec$$

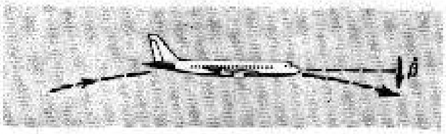
2.93 - خودرویی با گرانیگاه G و موتوری که به آن شتاب $0.5g$ می‌دهد از A با شعاع خمیدگی $100 \ m$ می‌گذرد. تندی آن در A چیست؟

$$a=a_n=v^2/\rho, v=\sqrt{\rho a_n}=\sqrt{(100-0.6)(0.5)(9.81)}=22.08 \ m/s$$
$$\underline{v=79.5 \ km/h}$$

نگاره 2.93



نگاره 2.95



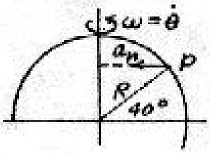
نگاره 2.96

2.94 - یک کشتی با تندی یکنواخت 20 گره دریایی، بر مسیری دایره می‌گردد. اگر برای $90°$ گردش، $60 \ s$ زمان بخواهد، شتابش چیست؟

$$a=a_n=v\dot{\beta}=20(1.852)\pi/((3.6)(2)(60))=\underline{0.269 \ m/s^2}$$

2.95 - شتاب نقطه P چیست؟ قطر زمین را $12742 \ km$ و تندی چرخشی آن را $0.729\times10^{-4} \ rad/s$ بگیرید.

$$a=a_n=r\dot{\theta}^2=R\dot{\theta}^2\cos\gamma=$$
$$=12.742(10^6)\cos40°(0.729\times10^{-4})/2=$$
$$=\underline{0.0259 \ m/s^2}$$



2.96 - خلبان هواپیمایی که با تندی $800 \ km/h$ پیش می‌رود، زاویه دیدش را با چه تندی تغییر دهد که

www.collegeprozheh.ir

در بلندی 8 km با شتاب گرانشی 9.79 m/s^2 به بی‌وزنی برسد؟

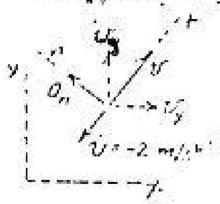
$a_n=v\dot{\beta}$ $\quad \dot{\beta}=0.04406$ rad/s $\quad \dot{\beta}=0.04406(180/\pi)=\underline{2.52 \text{ deg/s}}$

2.97 - ذره‌ای با تندی $\vec{v}=3\hat{i}+y\hat{j}$ m/s بر مسیر خمیده‌ای به شعاع 6.25 m و شتاب -2 m/s^2 پیش می‌رود. دستور تندی و شتاب آن چیست؟

$\underline{v}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,\underline{c}_t=\sqrt{5^2+4^2}\,\underline{c}_t$

$\underline{v}=5\underline{c}_t \quad a_t=\dot{v},\ a_n=v^2/\rho=4 \text{ m/s}^2$

$\underline{a}=4\underline{c}_n-2\underline{c}_t \text{ m/s}^2$

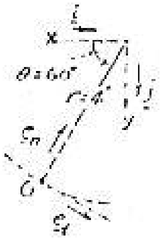


2.98 - دستورهای برداری شتاب G در $\theta=60^\circ$ و $\dot{\theta}=2$ rad/s و $\ddot{\theta}=2.45$ rad/s^2 برای چارچوب n-t و x-y چیست؟

$a_n=r\dot{\theta}^2=4(2.00)^2=16.00 \text{ m/sec}^2$

$a_t=r\ddot{\theta}=4(4.025)=16.10 \text{ m/sec}^2$

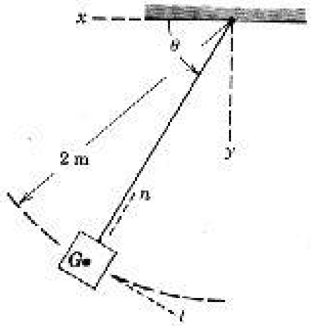
$\underline{a}=16.00\underline{e}_n+16.10en \text{ m/sec}^2$



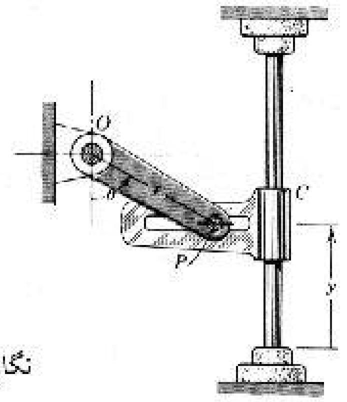
$a_x=-16.00\cos60^\circ-16.1\sin60^\circ=-21.9 \text{ m/sec}^2$

$a_y=16.1\cos60^\circ-16.00\sin60^\circ=-5.81 \text{ m/sec}^2$

$\underline{a}=-21.9\underline{i}-5.81\underline{j} \text{ m/sec}^2$

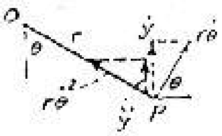


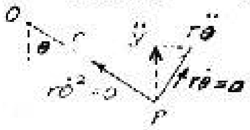
نگاره 2.98



نگاره 2.99

2.99 - y و $\dot{y}$ را برای داده‌های زیر بیابید. (a) $\ddot{\theta}=0,\ \dot{\theta}=\omega$ (b) $\dot{\theta}=0,\ \ddot{\theta}=\alpha$





(a) $\dot{\theta}=\omega \quad \ddot{\theta}=0 \quad \dot{y}=r\dot{\theta}\sin\theta=r\omega\sin\theta$

$\ddot{y}=r\dot{\theta}^2\cos\theta=r\omega^2\cos\theta$

(b) $\dot{\theta}=0 \quad \ddot{\theta}=\alpha \quad \dot{y}=r\dot{\theta}\sin\theta=0$

$\ddot{y}=r\ddot{\theta}\sin\theta=r\alpha\sin\theta$

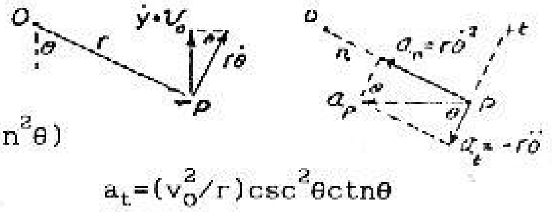
www.collegeprozheh.ir

2.100 - اگر در پرسش پیشین، $\dot{y}=v_0$ باشد، شتاب میخ P در چارچوب n و t چیست؟

$r\dot{\theta}=v_o/\sin\theta \quad \ddot{y}=0$

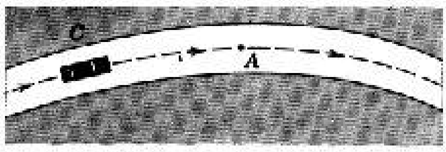
$\Rightarrow a_n=r\dot{\theta}^2=v_o^2/r\sin^2\theta$

$a_t=a_n \text{ctn}\theta=v_o^2 \text{ctn}\theta/(r\sin^2\theta)$



$a_n=(v_o^2/r)\csc^2\theta \qquad a_t=(v_o^2/r)\csc^2\theta \,\text{ctn}\theta$

2.101 - خودروی نشان داده، تندیش را با آهنگ $1.5 \ m/s^2$ می‌افزاید. اگر شتاب آن در A با شعاع خمیدگی $200 \ m$، $2.5 \ m/s^2$ باشد، اندازه تندی و شتاب آن در A چیست؟

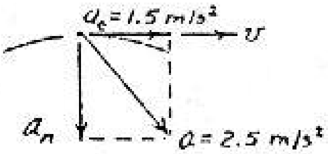


نگاره 2.101

$a^2=a_n^2+a_t^2 \quad a_n=v^2/\rho=\sqrt{a^2-a_t^2}$

$v^2=200\sqrt{2.5^2-1.5^2}=200(2)=400 \ (m/s)^2$

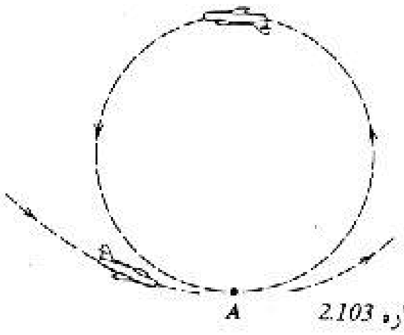
$v=20 \ m/s \quad 20(3.6)=72 \ km/h$



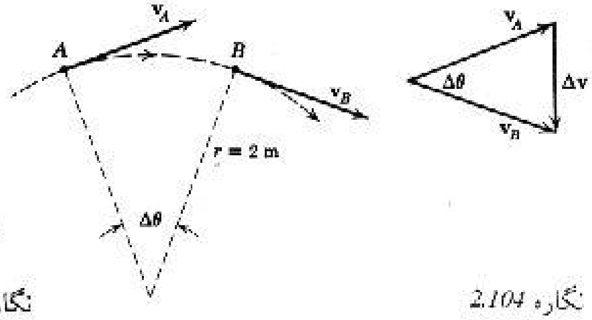
2.102 - خودرویی در سر یک پیچ با شعاع $240 \ m$ حرکت می‌کند. اگر شتاب آن در تندی $75 \ km/h$، $3 \ m/s^2$ باشد، تندیش با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

$a_n=v^2/\rho=1.8 \ m/sec^2 \quad a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}$

$a_t=\sqrt{a^2-a_n^2}=\sqrt{3^2-(1.8)^2}=2.4 \ m/sec^2$



نگاره 2.103



نگاره 2.104

2.103 - شتاب هواپیما در A، $3g$ است. اگر تندی هواپیما، $800 \ km/h$ باشد و با آهنگ $20 \ km/h$ در ثانیه افزایش یابد، شعاع خمیدگی در A چیست؟

www.collegeprozheh.ir

$a_t=20/3.6=5.56\ m/s^2$

$a^2=a_n^2+a_t^2 \quad a_n^2=(3(9.81))^2-5.56^2=835.2$

$a_n=28.90\ m/s^2 \quad a_n=v^2/\rho$

$\rho=(800/3.6)^2/28.90=\underline{1709\ m}$

2.104 - ذره‌ای با تندی $10\ m/s$ از A به B می‌رود. با بخش‌کردن Δv بر زمان رفتن از A بر B شتاب عمودی آن را برای (a) $\Delta\theta=30^\circ$ و (b) $\Delta\theta=15^\circ$ و (c) $\Delta\theta=5^\circ$ بیابید.

$\Delta v=2v\sin(\Delta\theta/2)=20\sin(\Delta\theta/2) \quad \Delta t=\Delta s/v=r\Delta\theta/v=2\Delta\theta/10=\Delta\theta/5$

$a_n)_{av}=\Delta v/\Delta t=100\sin(\Delta\theta/2)/\Delta\theta$

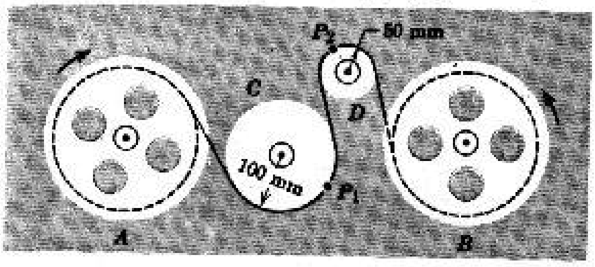
(a) $\Delta\theta=30^\circ$; $\Delta\theta=0.5236\ rad \quad (a_n)_{av}=49.4\ m/sec^2$

(b) $\Delta\theta=15^\circ$; $\Delta\theta=0.2618\ rad \quad (a_n)_{av}=49.9\ m/sec^2$

(c) $\Delta\theta=5^\circ$; $\Delta\theta=0.0873\ rad$, $(a_n)_{av}=49.98\ m/sec^2$

$a_n=v^2/r=100/2=50\ m/sec^2$

2.105 - نوار از گرد A به گرد B می‌پیچد. اگر در آرایش نشان داده، شتاب عمودی P_1، $40\ m/s^2$ و شتاب مماسی P_2، $30\ m/s^2$ باشد، شتاب P_1 و P_2 و تندی نوار چیست؟



نگاره 2.105

$P_1:\ a_n=v^2/r \quad v=\sqrt{0.1(40)}=\underline{2\ m/s}$

$a_1=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{40^2+30^2}=\underline{50\ m/s^2}$

$P_2:\ a_n=v^2/r=2^2/0.05=80\ m/s^2$

$a_2=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{80^2+30^2}=\underline{85.4\ m/s^2}$

2.106 - ماهواره‌ای در بلندی $200\ km$ به گرد ماه می‌گردد. تندی آن چیست؟

$a_n=v^2/\rho=v^2/(R+h) \quad R=1758\ km$

$h=200\ km \quad g_o=1.162\ m/s^2$

$a_n=g=g_o(R/(R+h))^2$

$=1.62((1738/(1738+200))^2=1.303\ m/s^2$

www.collegeprozheh.ir

$v^2=(1738+200)1.303(3600)^2(10^{-3})$

$=32.72(10^6)\ (km/h)^2 \quad \underline{v=5720\ km/h}$

2.107 - ماهواره‌ای که در بلندی $h=319\ km$ به گرد زمین می‌گردد باید تندی $27790\ km/h$ بدارد. شتاب گرانش را در آنجا بیابید. شعاع زمین را $R=6371\ km$ بگیرید.

$a=a_n=g=v^2/R=8.9\ m/sec^2$

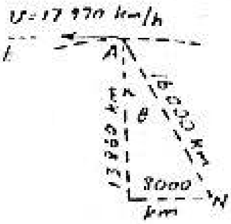
$g=g_oR^2/(R+h)^2=9.81(6371)^2/(319+6371)^2=8.9\ m/sec^2$

2.108 - ماهواره‌ای که به گرد زمین می‌گردد در نشیب مدارش با بلندی $400\ km$، تندی $32000\ km/h$ دارد. خمیدگی نشیب مدارش چیست؟ از $g=9821\ m/s^2$ و $D=1272\ km$ سود جویید.

$a_n=g=v^2/\rho \quad g=g_o(R/(R+h))^2$

$$\rho=\frac{1}{g_o}\left(\frac{R+h}{R}\right)^2v^2=\frac{1}{9.81(10)^{-3}}\left(\frac{\frac{12742}{2}+400}{\frac{12742}{2}}\right)^2\left(\frac{32000}{3600}\right)^2=\underline{9090\ km}$$

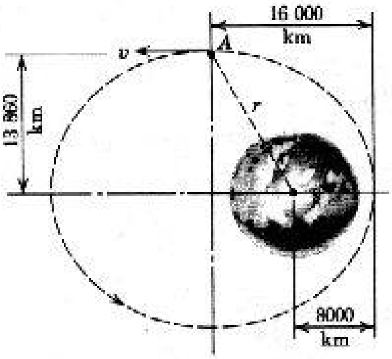
2.109 - ماهواره در A دارای تندی $17970\ km/h$ است. خمیدگی مدار در A چیست؟ g بر روی زمین، $9.821\ m/s^2$ و شعاع زمین $6371\ km$ است.



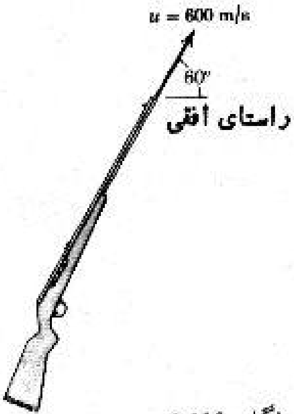
$$a=g=g_o\left(\frac{R}{R+h}\right)^2=9.821(6371/16000)^2=1.557\ m/s^2$$

$a_n=1.557\cos\theta=1.557(0.866)=1.348\ m/s^2 \quad a_n=v^2/\rho$,

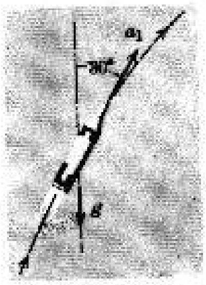
$$\rho=\frac{(17970)^2}{1.348(10^{-3})(3600)^2}=\underline{18480\ km}$$



نگاره 2.109



نگاره 2.110



نگاره 2.111

2.110 - گلوله پس از شلیک، افزون بر شتاب $g=9.81\ m/s^2$، شتابی کاهنده و وارون تندی نیز از برای

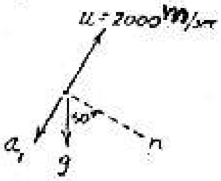
www.collegeprozheh.ir

اصطکاک هوا دارد. خمیدگی مسیر گلوله در دهانه تفنگ چیست؟

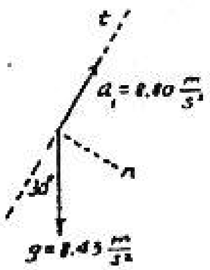
$a_n=v^2/\rho$, $\rho=v^2/a_n= u^2/(g\cos60^\circ)$

$\rho=(600)^2/(9.81(0.5))=73394.5$ m

$\Rightarrow$ $\rho=73.394$ km



2.111 - اگر $g=8.43$ m/s^2 و شتاب پیشران آن $a_1=880$ m/s^2 و تندی موشک، 30000 km/h و بلندی پرواز آن، 500 km باشد، خمیدگی مسیر آن چیست؟



$a_n=g\sin30^\circ=8.43(0.5)=4.22$ m/s^2

$a_n=4.22(3600)^2/1000=54630$ km/h^2

$a_n=v^2/\rho$ $\rho=v^2/a_n=(30000)^2/54630=16480$ km

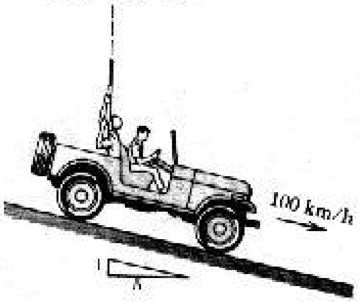
$\dot{v}=a_t=8.8-8.43\cos30^\circ=1.50$ m/s^2

2.112 - اگر گلوله با تندی 600 m/s رو به بالا شلیک شود، خمیدگی مسیر گلوله و بلندی بیشینه آن چیست؟

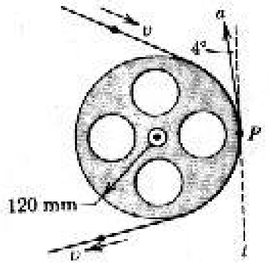
$v_x=cte=v\cos\theta=100(0.9806)/3.6=27.24$ m/s

$\theta=\tan^{-1}(1/5)=11.31^\circ$ $\cos11.31^\circ=0.9806$

At top: $a_n=v_x^2/\rho=g$ $\rho=v_x^2/g=(27.24)^2/9.81=75.6$ m



نگاره 2.112



نگاره 2.113

2.113 - نمودار با تندی 4 m/s از چرخ هرزگرد می‌گذرد. اگر شتاب P چنان باشد که کشیده‌ایم، کی نوار می‌ایستد؟

$a_n=v^2/r=4^2/0.120=133.3$ m/s^2

$a_t=-a_n\text{ctn}4^\circ=-133.3\text{ctn}4^\circ=-1907$ m/s^2

$a_t=cte$ $v_t=v_i+a_t t$ $0=4-1907t$

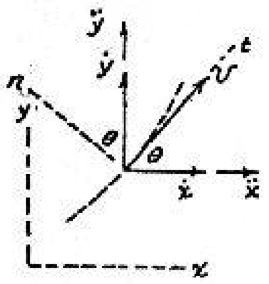
$t=4/1907=2.098(10^{-3})$ s

www.collegeprozheh.ir

2.114 - ذره‌ای با بردار $\vec{r}=(3t^2/2)\hat{i}+(2t^3/3)\hat{j}$ حرکت می‌کند. خمیدگی مسیر در $t=2$ s چیست؟

$\underline{r}=(3/2)t^2\underline{i}+(2/3)t^3\underline{j}$ m $\quad \underline{v}=\dot{\underline{r}}=3t\underline{i}+2t^2\underline{j}$ m/sec

$\underline{a}=\dot{\underline{v}}=3\underline{i}+4t\underline{j}$ m/sec^2



$t=2$ sec $\quad \dot{x}=3(2)=6$ m/sec $\quad \dot{y}=2(2^2)=8$ m/sec

$\ddot{x}=3$ m/sec^2 , $\ddot{y}=8$ m/sec^2

$\theta=\tan^{-1}(6/8)=\tan^{-1}(3/4)$

$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=6^2+8^2=100\,(\text{m/sec})^2$

$a_n=\ddot{y}\cos\theta-\ddot{x}\sin\theta=8(3/5)-3(4/5)=12/5\ (\text{m/sec})^2$

$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=100(5)/12 \quad \underline{\rho=41.7}$ m

2.115 - خودرو با تندی 250 km/h به A می‌رسد و ترمز می‌کند تا در C به تندی 200 km/h برسد. شتاب خودرو در گذر از B چیست؟

$a_t=$cte $\quad v_c^2=v_A^2+2a_t\Delta s_{A-c} \quad v_A=250/3.6$ m/s

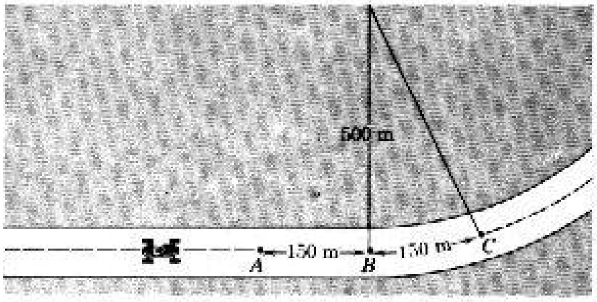
$v_c=200/3.6$ m/s $\quad a_t=-2.89$ m/s^2

$v_B^2=v_A^2+2a_t\Delta s_{A-B}=(250/3.6)^2+2(-2.89\times150)=3954$

$v_B=62.9$ m/s

B: $a_n=v_B^2/\rho=3954/500=7.91$ m/s^2

$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{(7.91)^2+(2.89)^2}=\underline{8.42}$ m/s^2



نگاره 2.115

2.116 - گلوله‌ای با تندی 460 m/s با زاویه 30° پرتاب می‌شود. خمیدگی مسیر آن، پس از 10 s چیست؟

$v=v_o+at \quad v_x=460(0.866)+0=398.36$ m/sec

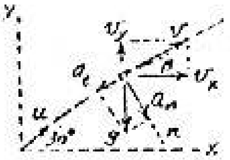
$v_y=460(0.5)-9.81(10)=132$ m/sec

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{398.36^2+132^2}=419.6\ m/sec$

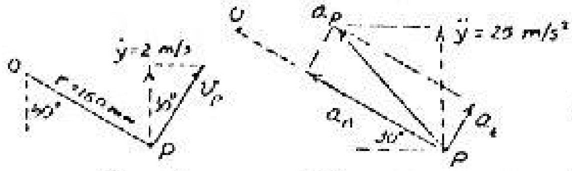
$\beta=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(132/398.36)=18.3^{\circ}$

$a_n=g\cos\beta=9.81(0.949)=9.31\ m/sec^2$

$a_n=v^2/\rho\ ,\ \rho=(419.6)^2/9.31=18911\ m$



2.117 - اگر در پرسش 2.99 در $\theta=60^{\circ}$ و $\dot{y}=2\ m/s$ و $\ddot{y}=25\ m/s^2$ باشد، شتاب a_t از میخ P در مسیری به شعاع $r=160\ mm$ چیست؟



سایه‌های عمودی را اندازه می‌گیریم و با هم برابر می‌کنیم.

$a_n=v_p^2/r=(2/\cos30^{\circ})^2/0.160=33.3\ m/s^2$

$33.3\sin30^{\circ}+a_t\cos30^{\circ}=25$

$a_t=(25-16.67)/0.866=\underline{9.62\ m/s^2}$

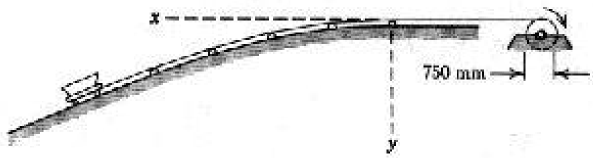
2.118 - ریسمان بسته‌شده به یک گاری به دور چرخی به قطر $750\ mm$ می‌پیچد که با تندی $120\ rev/min$ می‌چرخد. مسیر گاری با دستور $y=x^2/16$ برابر است. شتاب گاری r هنگامی که به یک متری زیر x می‌رسد، چیست؟

$y=x^2/16\quad dy/dx=x/8\quad d^2y/dx^2=1/8$

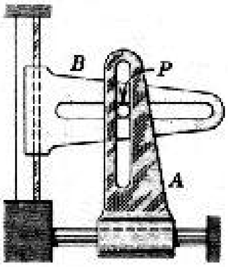
$\rho=[1+(dy/dx)^2]^{3/2}/(d^2y/dx^2)=[1+(x/8)^2]^{3/2}/(1/8)$

$\rho_{y=2}=(1+0.25)^{3/2}/(0.125)=11.18\ m\quad v=r\dot{\theta}=1.5\pi\ m/sec$

$a_t=\dot{v}=0\quad a=a_n=v^2/\rho=(1.5\pi)^2/11.18=1.98\ m/s^2$



نگاره 2.118



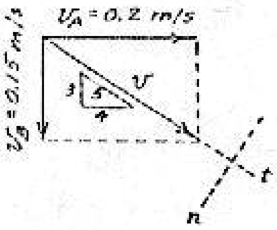
نگاره 2.119

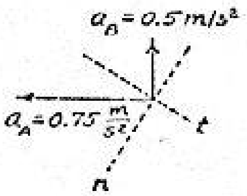
2.119 - اگر A با تندی $0.2\ m/s$ و شتاب $0.75\ m/s^2$ به راست برود و B با تندی $0.15\ m/s$ و شتاب $0.5\ m/s^2$ به پایین بیاید، شعاع خمیدگی مسیر P چیست؟

$v=\sqrt{0.15^2+0.2^2}=0.25\ m/s$

$a_n=0.15(3/5)-0.50(4/5)=0.05\ m/s^2$

www.collegeprozheh.ir





$a_n = v^2/\rho$

$\rho = 0.25^2/0.05 = \underline{1.25\ m}$

$a_t = -0.75(4/5) - 0.5(3/5)$

$= -0.9\ m/s^2$

$a_t = dv/dt = d(\rho\dot{\theta})/dt = \rho\ddot{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta} = \dot{\rho}v/\rho + \rho\ddot{\theta}$

تا هنگامی که $\ddot{\theta}$ را ندانیم، $\dot{\rho}$ پیدا نمی‌شود.

2.120 - ذره‌ای از مبدأ، با دستور $s=2t^3$ mm بر مسیر $y=2x^{3/2}$ پیش می‌رود. شتاب آن ذره در $t=1$ s چیست؟

$dy/dx = 3x^{1/2} \quad d^2y/dx^2 = (3/2)x^{-1/2}$

$\rho = [1+9x]^{3/2}/(3/2)x^{-1/2} = (2/3)\sqrt{x(1+9x)^3}$

$s = \int ds = \int_0^x \sqrt{1+(dy/dx)^2}$

$dx = \int \sqrt{1+9x}\ dx = 2[\sqrt{(1+9x)^3} - 1]/27$

$t=1\ sec \quad s=2\ m \quad 2 = 2[\sqrt{(1+9x)^3} - 1]/27$

$x = 0.913\ m$

$\rho = (2/3)\sqrt{0.913(1+9*0913)^3} = 17.84\ m$

$v = \dot{s} = 6t^2 = 6(1^2) = 6\ m/sec$

$a_t = \ddot{s} = 12t = 12(1) = 12\ m/sec^2$

$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(2.02)^2 + 12^2} = \underline{12.17\ m/s^2}$

2.121 - میله A با تندی 75 mm/s و شتاب 100 mm/s^2 به راست می‌رود. $\ddot{\theta}$ در $\theta=30^\circ$ چیست؟

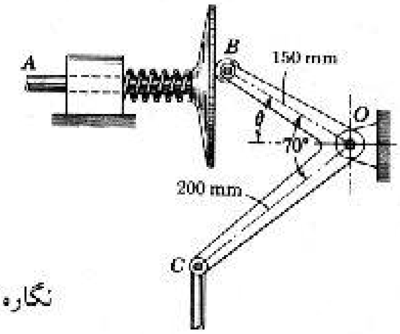
$a_{B_n} = v_B^2/r = (150)^2/150 = 150\ mm/s^2$

$\Rightarrow 150\cos 30^\circ - a_{B_t}\sin 30^\circ = 100$

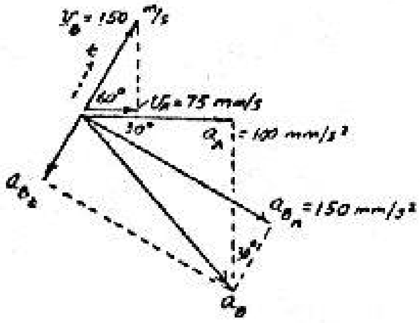
$a_{B_t} = (150(0.866) - 100)/0.5 = 59.8\ mm/s^2$

$a_{B_t} = r\ddot{\theta} \quad \ddot{\theta} = -59.8/150 = \underline{-0.399\ rad/s^2}$

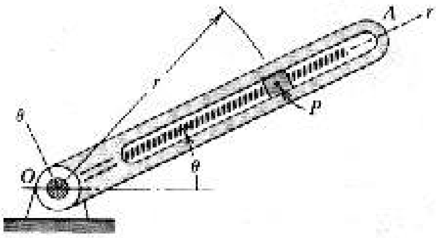
www.collegeprozheh.ir



نگاره 2.121



2.122 - سایه r و θ از شتاب P را در $\dot{\theta}=8$ rad/s و $\ddot{\theta}=-20$ rad/s^2 و $r=200$ mm و $\dot{r}=-300$ mm/s و $\ddot{r}=0$ بیابید.



نگاره 2.122

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-200(8^2)=-12800$ mm/s^2

$a_r=-12.8$ m/s^2

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=200(-20)+2(-300)(8)$

$=-8800$ m/s^2

$a_\theta=\underline{-8.80\ \text{m/s}^2}$

2.123 - اندازه تندی و سایه‌های r و θ از شتاب ذره‌ای با جابه‌جایی $r=2+5t^2/2$ و $\theta=0.5+3t^2/4$ در $t=2$ s چیست؟

$r=2+5t^2/2$, $\dot{r}=5t$, $\ddot{r}=5$ m/s^2

$\theta=0.5+3t^2/4$, $\dot{\theta}=3t/2$, $\ddot{\theta}=3/2$ rad/s^2

$t=2$ s $r=12$ mm $\dot{r}=10$ mm/s $\ddot{r}=5$ mm/s^2

$\dot{\theta}=3$ rad/s $\ddot{\theta}=3/2$ rad/s^2

$v_r=\dot{r}=10$ mm/s $v_\theta=r\dot{\theta}=12(3)=36$ mm/s

$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{(10)^2+(36)^2}=\underline{37.4\ \text{mm/s}}$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=5-12(3^2)=\underline{-103\ \text{mm/s}^2}$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=12(3/2)+2(10)(3)=\underline{78\ \text{mm/s}^2}$

2.124 - تندی و شتاب ذره‌ای که با $r=r_0e^{kt}$ و $\theta=ct$ حرکت می‌کند چیست؟

$r=r_oe^{kt}$ $\dot{r}=r_oke^{kt}$ $\ddot{r}=r_ok^2e^{kt}$

$\theta=ct$ $\dot{\theta}=c, \ddot{\theta}=0$ $v_r=\dot{r}=r_oke^{kt}$

www.collegeprozheh.ir

$v_\theta=r\dot\theta=r_o c e^{kt}$ $\quad v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=r_o e^{kt}\sqrt{k^2+c^2}$

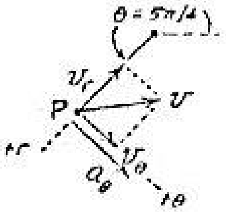
$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=r_o k^2 e^{kt}-r_o e^{kt}c^2=r_o e^{kt}(k^2-c^2)$

$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta=0+2r_o k c e^{kt}$

$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=r_o e^{kt}\sqrt{k^4-2k^2c^2+c^4+4k^2c^2}=$

$=r_o e^{kt}\sqrt{k^4+2k^2c^2+c^4}=\underline{r_o(k^2+c^2)e^{kt}}$

2.125 - ذره‌ای در $\theta=5\pi/4$ دارای $a_\theta=16\ mm/s^2$ و $r=5\ mm$ و $\ddot r=6\ mm/s^2$ و $\dot\theta=0.5\ rad/s$ و $\ddot\theta=4\ rad/s^2$ است، تندی آن چیست؟



$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta \quad 16=5(4)+2\dot r(0.5) \quad \dot r=-4\ m/sec=v_r$

$v_\theta=r\dot\theta=5(0.5)=2.5\ m/sec$

$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{(-4)^2+(2.5)^2}=\underline{4.72\ m/s}$

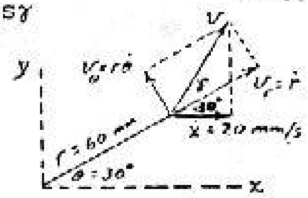
2.126 - ذره‌ای در $r=60\ mm$ و $\theta=30^\circ$ دارای $\dot r=20\sqrt3\ mm/s$ و $\dot x=20\ mm/s$ است. اندازه تندی و $\dot\theta$ چیست؟

$v_r=\dot r=20\sqrt3\ mm/s \quad v=20/\cos(\gamma+30^\circ) \quad v=20\sqrt3/\cos\gamma$

$\Rightarrow 20/\cos(30+\gamma)=20\sqrt3/\cos\gamma$

$\cos\gamma=\sqrt3((\sqrt3/2)\cos\gamma-(1/2)\sin\gamma)$

$1=(3/2)-(\sqrt3/2)\tan\gamma \quad \gamma=\tan^{-1}(1/\sqrt3)=30^\circ$



$v=20\sqrt3/(\sqrt3/2)=\underline{40\ mm/s} \quad r\dot\theta=v\sin\gamma=40(1/2)=20\ mm/s$

$\dot\theta=20/60=\underline{0.333\ rad/s}$

2.127 - تندی و شتاب ذره‌ای با جابگاه $r=\frac{t^3}{3}$ و $\theta=2\cos(\frac{\pi t}{6})$، در $t=2\ s$ چیست؟

$r=t^3/3, \quad \dot r=t^2 \quad \ddot r=2t$

$\theta=2\cos(\pi t/6) \quad \dot\theta=(-\pi/3)\sin(\pi t/6)$

$\ddot\theta=(-\pi^2/18)\cos(\pi t/6)$

$t=2\ s \quad r=8/3\ m \quad \dot r=4\ m/s \quad \ddot r=4\ m/s^2$

$\dot\theta=(-\pi/3)\sin(\pi/3)=-\pi/(2\sqrt3)=-0.907\ rad/s$

$\ddot\theta=(-\pi^2/18)\cos(\pi/3)=-\pi^2/36=-0.274\ rad/s^2$

www.collegeprozheh.ir

$v_r=\dot{r}=4\ m/s\ ,\ v_\theta=r\dot{\theta}=(8/3)(-0.907)=-2.42\ m/s$

$a_r=\ddot{r}-2\dot{r}\dot{\theta}=4-(8/3)(-0.907)^2=4-2.19=1.807\ m/s^2$

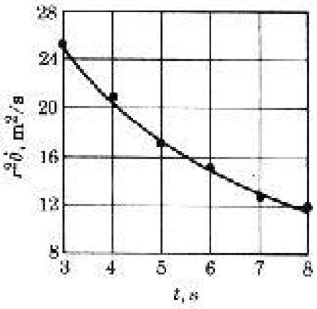
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

$\quad=(8/3)(-0.274)+2(4)(-0.907)=-7.99\ m/s^2$

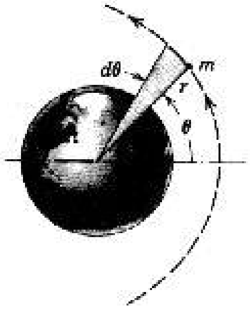
$\Rightarrow\ \underline{\underline{v}=4\underline{e}_r-2.42\underline{e}_\theta\ m/s}\quad \underline{\underline{a}=1.807\underline{e}_r-7.99\underline{e}_\theta\ m/s^2}$

2.128 - سایه شتاب θ از ذره‌ای با رفتار نشان داده، در $t=5\ s$ و $r=\frac{I}{3}\ m$ چیست؟

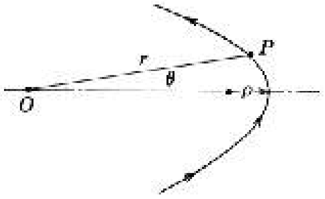
$a_\theta=(1/r)d(r^2\dot{\theta})/dt=-3(8/3)=-8\ m/s^2$



نگاره *2.128*



نگاره *2.129*



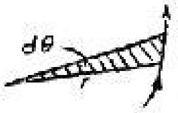
نگاره *2.130*

2.129 - ماهواره m بر مداری بیضی به گرد زمین می‌گردد. اگر $a_\theta=0$ باشد، درستی قانون دوم کپلر را نشان دهید.

$dA=(r/2)rd\theta=(1/2)r^2d\theta$

$\dot{A}=dA/dt=(1/2)r^2\dot{\theta}=constant$

$a_\theta=(1/r)d(r^2\dot{\theta})/dt=0$



2.130 - ذره P بر مسیر $r=f(\theta)=f(-\theta)$ پیش می‌رود و هنگام گذر از $\theta=0$ با شعاع خمیدگی ρ تندی v دارد. $\ddot{r}$ چیست؟

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\quad ,\quad \theta=0\quad v=r\dot{\theta}\ ,\ a_r=a_n\ (a_n=v^2/\rho)$

$\Rightarrow\ \ddot{r}-r(v/r)^2=-v^2/\rho$

$\ddot{r}=v^2(1/r-1/\rho)=\underline{-v^2(1/\rho-1/r)}$

2.131 - بازو با آهنگ یکنواخت $\dot{\theta}=\omega$ می‌چرخد و میخ A را بر بادامکی با دستور $r=b-cCos\theta(b>c)$ پیش می‌راند. شتاب A چیست؟

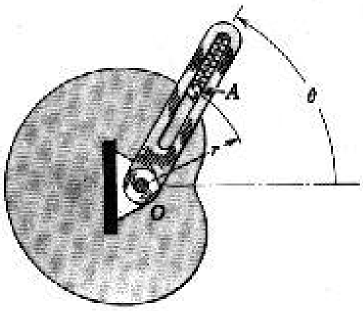
$r=b-c\cos\theta\ ,\ \dot{r}=c\dot{\theta}\sin\theta\ ,\ \ddot{r}=c\dot{\theta}^2\cos\theta$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=c\dot{\theta}^2\cos\theta-(b-c\cos\theta)\dot{\theta}^2=(2c\cos\theta-b)\dot{\theta}^2$

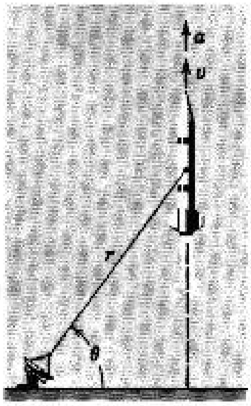
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2c\dot{\theta}^2\sin\theta$

www.collegeprozheh.ir

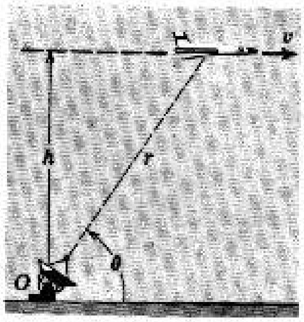
$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=\omega^2\sqrt{4c^2-4bc\cos\theta+b^2}\quad,\quad \omega=\dot\theta$$



نگاره 2.131

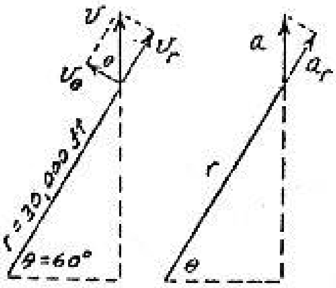


نگاره 2.132



نگاره 2.133

2.132 - موشک نشان داده، با رادار ردیابی می‌شود. اگر در $\theta=60^\circ$ و $r=9\ km$ و $\ddot r=21\ m/s^2$ و $\dot\theta=0.02\ rad/s$ باشد، تندی و شتاب موشک چیست؟



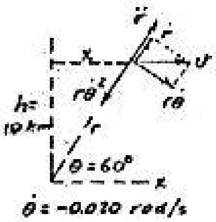
$$v_\theta=r\dot\theta=9(10^3)(0.020)=180\ m/sec$$

$$v=v_\theta/\cos60^\circ=180/0.5=360\ m/s$$

$$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=21-9(10^3)(0.020)^2=17.4\ m/sec^2$$

$$a=a_r/\sin60^\circ=17.4/0.866=\underline{20.1\ m/s^2}$$

2.133 - اگر $h=10\ km$ و در $\theta=60^\circ$، $\dot\theta=0.02\ rad/s$ باشد، $\ddot r$ و v چیست؟



$$a=0\Rightarrow a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=0\qquad \ddot r=r\dot\theta^2$$

$$r=h/\sin\theta\qquad r=10(2)/\sqrt3=11.55\ km$$

$$\ddot r=11.55(-0.020)^2=0.00462\ km/s^2=\underline{4.62\ m/s^2}$$

$$v=|r\dot\theta|/\sin\theta=h\dot\theta/\sin^2\theta=0.267\ km/s$$
$$v=0.267(3600)=\underline{960\ km/h}$$

2.134 - مسیر ذره P بر پره‌ای از یک تلمبه چرخان، با دستور $r=r_0e^{n\theta}$ بیان می‌شود. اگر تلمبه با آهنگ یکنواخت $\dot\theta=k$ بچرخد، شتاب P به هنگام بیرون پریدن چیست؟

$$r=r_0e^{n\theta}\quad,\quad \dot r=r_0n\dot\theta e^{n\theta}=r_0nke^{n\theta}$$

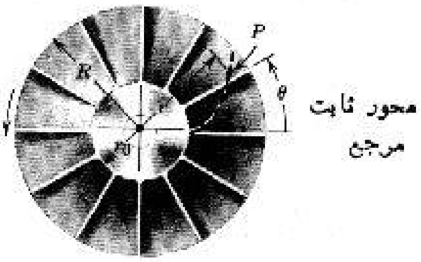
$$\dot\theta=k=cte\qquad \ddot r=r_0n^2k^2e^{n\theta}=rn^2k^2$$

www.collegeprozheh.ir

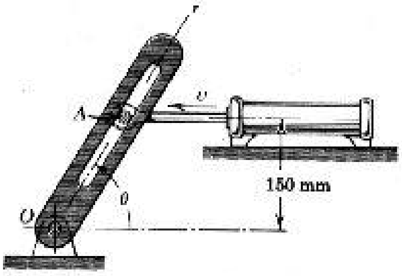
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=rn^2k^2-rk^2=(n^2-1)k^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2rnk^2$

$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=rk^2\sqrt{(n^2-1)^2+(2n)^2}=\underline{Rk^2(n^2+1)}\quad r=R$



نگاره 2.134



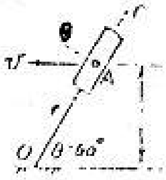
نگاره 2.135

2.135 - اگر $v=0.9\ m/s$ باشد، r و $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ در $\theta=60^\circ$ چیست؟

$\dot{r}=v_r=-v\cos\theta=-0.9\cos60^\circ=-0.45\ m/s$

$r\dot{\theta}=v\sin\theta=0.9\sin60^\circ=0.78\ m/sec$

$\dot{\theta}=0.78(2)\sin60^\circ=\underline{1.35\ rad/s}$



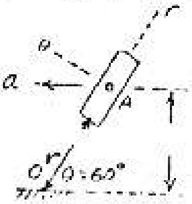
$a=0\Rightarrow a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0$

$r=0.58\ m\quad a=0\Rightarrow a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0$

$\ddot{r}=r\dot{\theta}^2=1.057\ m/sec^2\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$

$\ddot{\theta}=-2\dot{r}\dot{\theta}/r=-2(-0.45)(1.35)=1.215\ r/s^2$

2.136 - اگر پیستون پرسش پیش، از $\theta=60^\circ$ با شتاب $\dot{v}=1.2\ m/s^2$ به راه افتد، $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟



$v=0\Rightarrow v_r=\dot{r}=0\quad v_\theta=r\dot{\theta}=0\Rightarrow \underline{\dot{\theta}=0}\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-1.2\cos60^\circ$

$\ddot{r}=-1.2(1/2)+0=-0.6\ m/sec^2\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=1.2\sin60^\circ$

$\ddot{\theta}=1.8\ rad/sec^2$

2.137 - با $\dot{\theta}=2\ rad/s$، سایه تندی و شتاب P بر r، در $\theta=60^\circ$ چیست؟

$h=x\tan\theta\quad 0=\dot{x}\tan\theta+x\dot{\theta}\sec^2\theta=\dot{x}\tan\theta+(h\,ctn\theta)\dot{\theta}\sec^2\theta$

www.collegeprozheh.ir

$v=-\dot{x}=h\dot{\theta}ctn\theta sec^2\theta/tan\theta=h\dot{\theta}csc^2\theta$

$=200(2)(2/\sqrt{3})^2=\underline{533\ mm/s}$

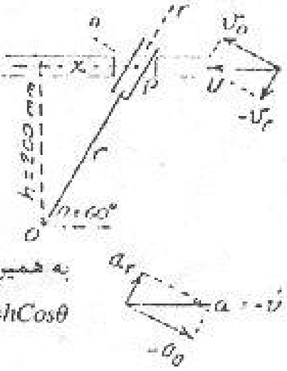
$v_r=-vcos\theta=-533(1/2)=\underline{-267\ mm/s}$

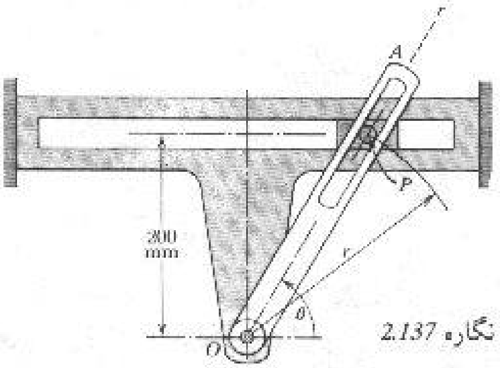
$-a=\dot{v}=h\dot{\theta}(2csc\theta)(-ctn\theta csc\theta)\dot{\theta}=-2h\dot{\theta}^2ctn\theta csc^2\theta$

$a=2(200)2^2(2/\sqrt{3})^2/\sqrt{3}\ =\underline{1232\ mm/s^2}$

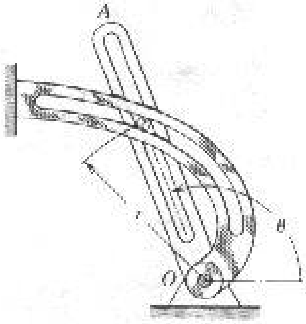
$a_r=acos\theta=1232(1/2)=\underline{616\ mm/s^2}$

به همین شیوه $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ از $r=hCos\theta$ به دست می‌آید.





نگاره 2.137



نگاره 2.138

2.138 - بازوی OA، میخی را در شیار خمیده $r=k\theta$ از $\theta=\pi/4$ با شتاب زاویه‌ای یکنواخت α به راه می‌اندازد. شتاب میخ در $\theta=3\pi/4$ چیست؟

$r=k\theta\ ,\ \dot{r}=k\dot{\theta}\ ,\ \ddot{r}=k\ddot{\theta}=k\alpha$

$$\dot{\theta}^2=2\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\alpha d\theta\ =2\alpha(3\pi/4-\pi/4)=\pi\alpha$$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=k\alpha-k\theta(\pi\alpha)=k\alpha(1-3\pi^2/4)$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=k\alpha(3\pi/4)+2k\sqrt{\alpha r}\sqrt{\pi\alpha}=k\pi\alpha(11/4)$

$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=k\alpha\sqrt{(1-3\pi^2/4)^2+(11\pi/4)^2}=\underline{10.76k\alpha}$

2.139 - با $b=b_oSin2\pi nt$ بیشینه سایه شتاب نقطه A بر r و θ چیست؟

$r=r_o+b_osin(2\pi nt)\ ,\ \dot{r}=2n\pi b_ocos(2\pi nt)\ ,$

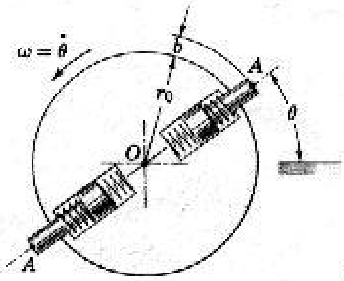
$\ddot{r}=-4\pi^2b_on^2sin(2\pi nt)\ \ \dot{\theta}=\omega\ \ \ddot{\theta}=0\ \ \ a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$

$a_r=-4\pi^2n^2b_osin(2\pi nt)-(r_o+b_osin(2\pi nt))\omega^2$

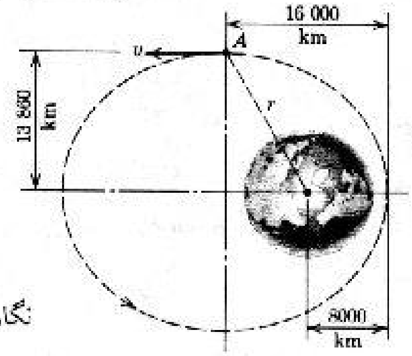
$|a_r|_{Max.}=\underline{(4\pi^2n^2+\omega^2)b_o+r_o\omega^2}\ \ \ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

www.collegeprozheh.ir

$a_\theta = 0 + 4\pi b_o n\omega\cos(2\pi nt) \quad |a_\theta|_{Max.} = 4\pi b_o n\omega$



نگاره 2.139

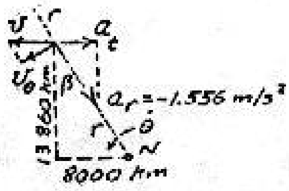


نگاره 2.140

2.140 - ماهواره در A دارای تندی $v = 17970$ km/h است و زمین آن را با شتاب $a = a_r = -1.556$ m/s^2 می‌کشد. $\dot{v}$ و $\ddot{r}$ چیست؟

$\beta = \tan^{-1}(8000/13860) = 30^\circ \quad r = 16000$ km

$a_t = -1.556\sin 30^\circ \quad \dot{v} = a_t = -0.778$ m/s^2



$v_\theta = r\dot{\theta} \quad \dot{\theta} = v_\theta/r = v\cos\beta/r$

$\dot{\theta} = (17970/16000)\cos 30^\circ = 0.973$ rad/h

$\ddot{r} = -1.556 + 16(10^6)(0.973/3600)^2 = -0.388$ m/s^2

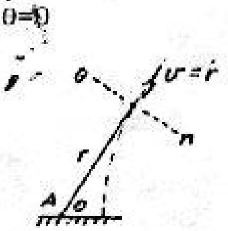
2.141 - رهگیری موشک در $r = 10.5$ km اندازه‌های $\dot{r} = 480$ m/s و $\dot{\theta} = 0$ و $\ddot{\theta} = -0.0072$ rad/s^2 را نشان می‌دهد. شعاع خمیدگی مسیر موشک چیست؟

Radial line must be tangent to trajectory for

$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow +\theta$ direction is in the opposite sense to the normal n-direction of the curve.

$r = 10500$ m $\quad \dot{r} = 480$ m/sec $\quad \dot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} = -7.20(10^{-3})$ rad/s^2

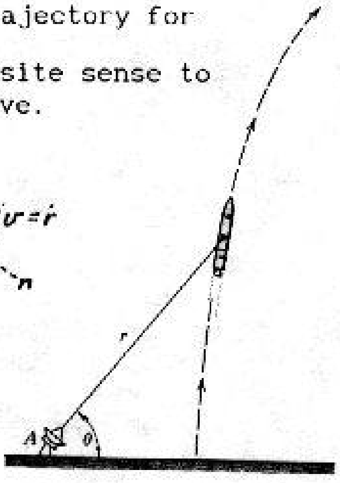


$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$= 10500(-7.20)(10^{-3}) + 0$

$= -75.6$ m/s^2

$-a_\theta = a_n = v^2/\rho$



نگاره 2.141

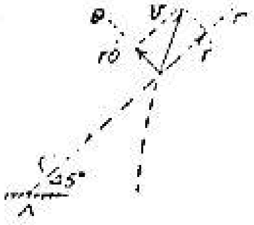
$\rho = v^2/-a_\theta = (480)^2/75.6 = 3047$ m

www.collegeprozheh.ir

2.142 - اگر موشک پرسش پیش، در $\theta=45^\circ$ به تندی 360 m/s و $r=5.4$ km و $\dot r=3/2$ m/s و $\ddot r=16.89$ m/s² و $a\theta=-4.8$ m/s² برسد، a_r و $\ddot\theta$ چیست؟

$\dot r=1.5$ m/s $\quad \ddot r=16.89$ m/s² $\quad a_\theta=-4.8$ m/s²

$v=360$ m/s



$v^2=\dot r^2+(r\dot\theta)^2 \quad |r\dot\theta|=\sqrt{(360)^2-(3/2)^2}=360$ m/s

$\dot\theta=360/5400=0.0666$ rad/s (+)

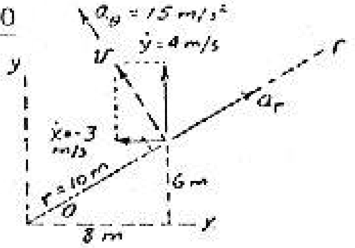
$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=16.89-5400(0.0666)^2=-7.062$ m/s²

$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta$

$\ddot\theta=(-4.8-2[1.5][0.0666])/5400=\underline{-0.000926 \text{ rad/s}^2}$

2.143 - ذره‌ای در $x=8$ m و $y=6$ m با $\dot x=-3$ m/s و $\dot y=4$ m/s و $a_r=10$ m/s² و $a_\theta=15$ m/s² حرکت می‌کند. در این هنگام، $\dot r$ و $\ddot r$ و $\dot\theta$ و $\ddot\theta$ و ρ چیست؟

$v=r\dot\theta \quad 5=10\dot\theta \quad \underline{\dot\theta=0.5 \text{ rad/s}} \quad a_r=10$ m/s² $\quad v_r=\underline{\dot r=0}$



$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2 \quad 10=\ddot r-10(1/2)^2 \quad \underline{\ddot r=12.5 \text{ m/s}^2}$

$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta \quad 15=10\ddot\theta+2(0)(1/2)$

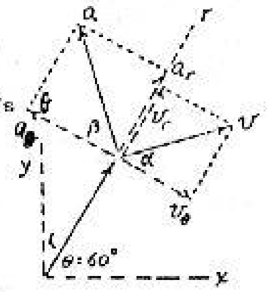
$\underline{\ddot\theta=1.5 \text{ rad/s}^2}$

$a_n=a_r=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_r=5^2/10=\underline{2.5 \text{ m}}$

2.144 - اندازه تندی و سایه‌های r و θ از شتاب، و همچنین a_t شتاب مماسی ذره‌ای را بیابید که با $r=0.6$ m و $\dot r=1.2$ m/s و $\ddot r=4.8$ m/s² و $\theta=\pi/3$ rad و $\dot\theta=-2$ rad/s و $\ddot\theta=12$ rad/s² حرکت می‌کند.

$r=0.6$ m $\quad \dot r=v_r=1.2$ m/s $\quad \ddot r=4.8$ m/s²

$\theta=\pi/3 \quad \dot\theta=-2$ rad/s $\quad \ddot\theta=12$ rad/s²



$v_\theta=r\dot\theta=0.6(-2)=-1.2$ m/s $\quad v=\sqrt{1.2^2+(-1.2)^2}=1.7$ m/s

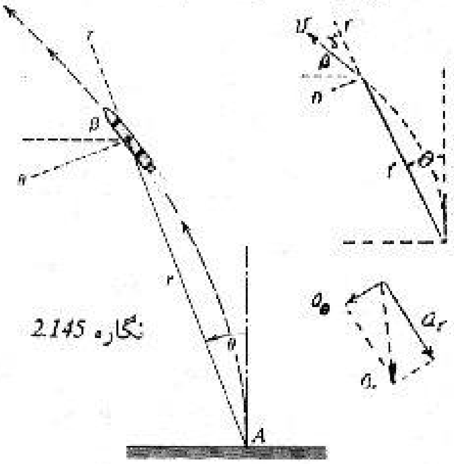
$(\alpha=45^\circ) \quad a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=4.8-0.6(-2)^2=2.4$ $\underline{\text{m/s}^2}$

$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta=0.6(12)+2(1.2)(-2)=2.4$ $\underline{\text{m/s}^2}$

$(\beta=45^\circ \Rightarrow \underline{v\perp a}) \quad a=a_n \quad \underline{a_t=0}$

www.collegeprozheh.ir

2.145 - 10 ثانیه پس از پرتاب موشک از A اندازه‌های $\theta=22^o$ و $\dot{\theta}=0.0788$ rad/s و $r=2200$ m و $\dot{r}=500$ m/s و $\ddot{r}=4.66$ m/s^2 و $\ddot{\theta}=-0.0341$ rad/s^2 یادداشت می‌شود. در این هنگام، زاویه β و اندازه تندی و شتاب موشک چیست؟



نگاره 2.145

$\theta=22^o \quad \dot{\theta}=0.0788$ rad/s

$\ddot{\theta}=-0.0341$ rad/s^2

$r=2200$ m $\quad \dot{r}=500$ m/s

$\ddot{r}=4.66$ m/s^2 $\quad v_r=\dot{r}$

$v_\theta=r\dot{\theta}=2200(0.0788)=173.4$ m/s

$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{500^2+(173.4)^2}$

$=529$ m/s

$\gamma=\tan^{-1}(v_\theta/v_r)=\tan^{-1}(173.4/500)=19.12^o$

$\beta=90-\gamma-\theta=90-19.12-22=48.9^o$

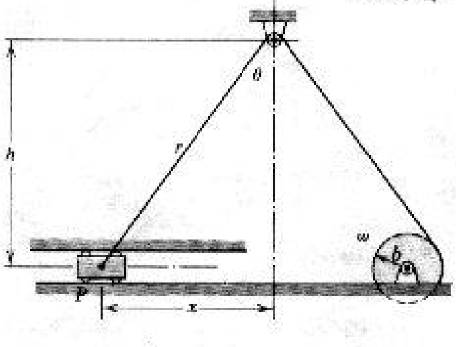
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=4.66-2200(0.0788)^2=-9.00$ m/s^2

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

$=2200(-0.0341)+2(500)(0.0788)=3.78$ m/s^2

$a=\sqrt{a_\theta^2+a_r^2}=\sqrt{(3.78)^2+(9.00)^2}=9.76$ m/s^2

2.146 - چرخ به شعاع b با تندی یکنواخت ω می‌چرخد و ریسمان را می‌کشد. تندی و شتاب P را بیابید و یافته‌های خود را با مشتق‌گیری از دستور $x^2+h^2=r^2$ بیازمایید.



نگاره 2.146

$v\sin\theta=-\dot{r}=b\omega \quad \ddot{r}=0 \quad v=b\omega/\sin\theta$

$v_\theta=r\dot{\theta}=-v\cos\theta=-b\omega\,ctn\theta$

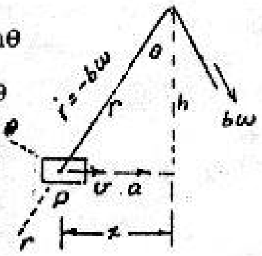
$\dot{\theta}=(-b\omega/r)ctn\theta$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-a\sin\theta$

$a=(r\dot{\theta}^2-\ddot{r})/\sin\theta$

$=(b^2\omega^2/h)ctn^3\theta$

$x^2+h^2=r^2$



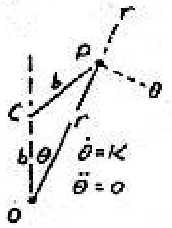
www.collegeprozheh.ir

$2x\dot{x}+0=2r\dot{r}$ $v=-\dot{x}=-r\dot{r}/x=b\omega/\sin\theta$ $x\ddot{x}+\dot{x}^2=\dot{r}^2$

$a=-\ddot{x}=(\dot{x}^2-\dot{r}^2)/x=(b^2\omega^2/\sin^2\theta-b^2\omega^2)/h\tan\theta$

$=(b^2\omega^2/h)\text{ctn}^3\theta$

2.147 - شتاب P را در بازه‌ای که $\dot{\theta}=k$ و یکنواخت است بیابید.

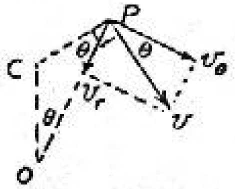


$r=2b\cos\theta$ $\dot{r}=-2b\dot{\theta}\sin\theta=-2bk\sin\theta$ $\ddot{r}=-2bk^2\cos\theta$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-4bk^2\cos\theta$

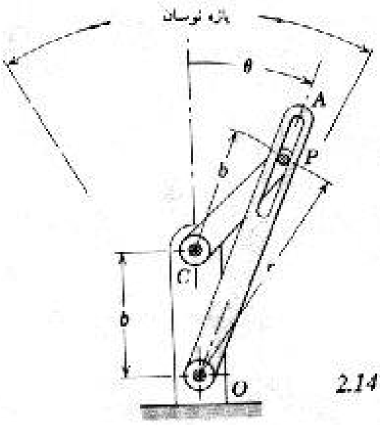
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2(-2bk\sin\theta)k=-4bk^2\sin\theta$

$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=4bk^2\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\underline{4bk^2}$

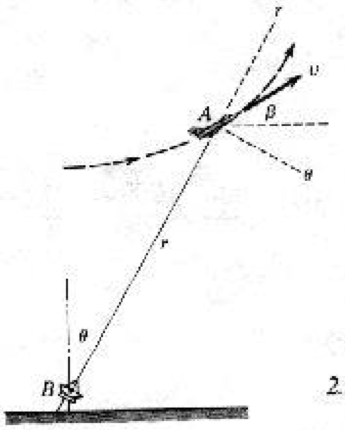


$v_r=\dot{r}=-2bk\sin\theta$ $v_\theta=r\dot{\theta}=2bk\cos\theta$

$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\underline{2bk}$ $\Rightarrow a=a_n=v^2/b)$



نگاره 2.147

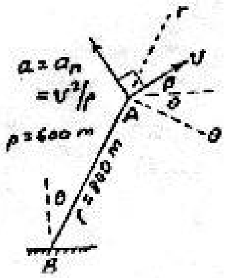


نگاره 2.148

2.148 - اندازه v_r و v_θ و a_r و $\ddot{\theta}$ را با $v=400$ km/h و $\rho=600$ m و $\beta=30^\circ$ و $r=800$ m و $\theta=30^\circ$ بیابید.

$\theta=\beta=30^\circ$ $v=400/3.6=111.1$ m/s

$v_r=v\sin(\beta+\theta)=111.1\sin60^\circ=\underline{96.2^\circ}$



$v_\theta=r\dot{\theta}=v\cos(\beta+\theta)=111.1\cos60^\circ=\underline{55.6\text{ m/s}}$

$\dot{r}=v_r=96.2$ m/s $\dot{\theta}=55.6/800=0.0694$ rad/s

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=a_n\cos60^\circ=(1/2)(111.1)^2/600$

www.collegeprozheh.ir

$=\underline{10.29\ m/s^2}$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=-a_n\sin60^\circ$

$$\ddot{\theta}=-(111.1)^2\sqrt{3}/(600(800)(2))-\frac{2(96.2)(0.0694)}{800}$$

$=\underline{0.0390\ rad/s^2}$

2.149 - اندازه تندی و $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ و ρ و a_t را برای ذره‌ای با $x=100\ mm$ و $y=75\ mm$ و $\dot{x}=75\ mm/s$ و $\dot{y}=100\ mm/s$ و $a_r=250\ mm/s^2$ و $a_\theta=0$ بیابید.

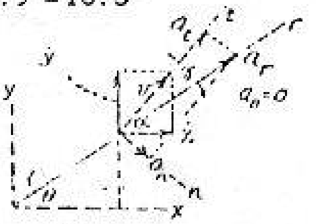
$\gamma=\alpha-\theta=\cos^{-1}(75/125)-\cos^{-1}(100/125)=53.1^\circ-36.9^\circ=16.3^\circ$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=250\ mm/s^2$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$

$v_r=\dot{r}=v\cos\gamma=125\cos16.3^\circ=119.98\ mm/s$

$v_\theta=r\dot{\theta}=v\sin\gamma=125\sin16.3^\circ=35.08\ mm/s$

$\Rightarrow\ \dot{\theta}=35.08/125=0.2806\ rad/s$



(b): $\ddot{r}-125(0.2806)^2=250$

$\ddot{r}=250+9.842=\underline{259.842\ mm/s^2}$

a_θ: $125\ddot{\theta}+2(119.98)(0.2806)=0$ $\underline{\ddot{\theta}=-0.538\ rad/s^2}$

(c): $a_n=a\sin\gamma=a_r\sin\gamma=250\sin16.3^\circ=70.17\ mm/s^2$

$a_n=v^2/\rho$ $\rho=v^2/a_n=125^2/70.17=\underline{222.67}\ mm$

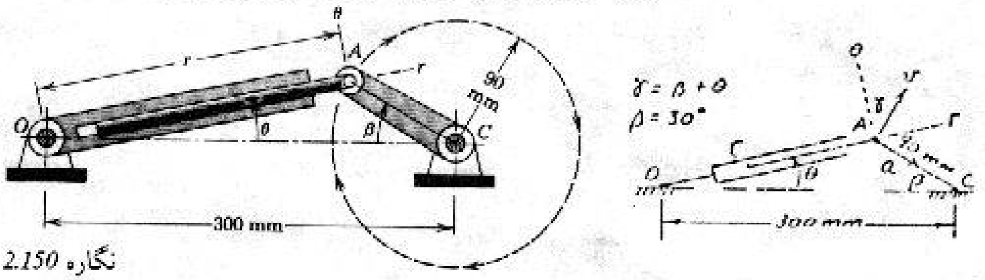
(d): $a_t=a\cos\gamma=a_r\cos\gamma=250\cos16.3^\circ=\underline{235.95\ mm/s^2}$

2.150 - اندازه $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ در $\beta=30^\circ$ و $\dot{\beta}=60\ rad/s$ چیست؟

$r\cos\theta+90\cos30^\circ=300$ $r\sin\theta=90\sin30^\circ$

$r=226.6\ mm$ $\theta=11.46^\circ$ $\gamma=30+11.46=41.46^\circ$

$v=\overline{AC}\dot{\beta}=90(60)=5400\ mm/s$ or $5.40\ m/s$



نگاره 2.150

www.collegeprozheh.ir

$a=a_n=\overline{AC}\dot{\beta}^2=90(60)^2=324(10^3)$ mm/s² $=324$ m/s²

$a_t=\overline{AC}\ddot{\beta}=0 \quad v_r=\dot{r}=v\sin\gamma=5.40\sin 41.46^\circ=\underline{3.58 \text{ m/s}}$

$v_\theta=r\dot{\theta}=v\cos\gamma=5.40\cos 41.46^\circ=4.05$ m/s

$\dot{\theta}=4.05/02266=\underline{17.86 \text{ rad/s}} \quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=a\cos\gamma$

$\ddot{r}=0.2266(17.86)^2+324\cos 41.46^\circ=\underline{315 \text{ m/s}^2}$

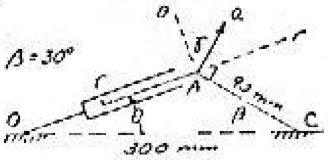
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=-a\sin\gamma$

$\ddot{\theta}=-2\dot{r}\dot{\theta}/r-(a/r)\sin\gamma=-1510$ rad/s²

2.151 - اگر سنگ CA در پرسش پیش، با $\ddot{\beta}=8$ rad/s² از $\beta=30^\circ$ به راه افتد، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

From Prob 2/150 for $\beta=30^\circ$ $r=0.2266$ m $\theta=11.46^\circ$

$T=41.4 \quad a=a_t=\overline{AC}\ddot{\beta}=0.090(8)=0.72$ m/s²



$\dot{\beta}=0 \Rightarrow \dot{\theta}=0 \quad \dot{r}=0 \quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=a\sin\gamma$

$\ddot{r}=0.72\sin 41.46^\circ+0=\underline{0.479 \text{ m/s}^2}$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=a\cos\gamma \quad \ddot{\theta}=(0.72/0.2266)\cos 41.46^\circ=\underline{2.38 \text{ m/s}^2}$

2.152 - بازوی OA از دستگاه پرسش 2.147 با دستور $\theta=\theta_0 Sin(2\pi t/\tau)$ تاب می‌خورد. شتاب P را در (a) $t=\tau/4$ و (b) $t=\tau/2$ بیابید.

$r=2b\cos\theta \quad \dot{r}=-2b\dot{\theta}\sin\theta$

$\ddot{r}=-2b\ddot{\theta}\sin\theta-2b\dot{\theta}^2\cos\theta$

$\theta=\theta_0\sin(2\pi t/\tau) \quad \dot{\theta}=(2\pi\theta/\tau)\cos(2\pi t/\tau)$

$\ddot{\theta}=(-4\pi^2/\tau^2)\theta_0\sin(2\pi t/\tau)$

(a): $t=\tau/4 \quad \theta=\theta_0 \quad \dot{\theta}=0 \quad \ddot{\theta}=(-4\pi^2/\tau^2)\theta_0$

$r=2b\cos\theta_0 \quad \dot{r}=0 \quad \ddot{r}=(8\pi^2/\tau^2)\theta_0 b\sin\theta_0$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=(8\pi^2/\tau^2)\theta_0 b\sin\theta_0-0$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2b\cos\theta_0(-4\pi^2\theta_0/\tau^2)+0$

www.collegeprozheh.ir

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=(8\pi^2/\tau^2)\theta_o b\sqrt{\sin^2\theta_o+\cos^2\theta_o}=\underline{8\pi^2\theta_o b/\tau^2}$$

(b): $t=\tau/2 \quad \theta=0 \quad \dot\theta=-2\pi\theta_o/\tau \quad \ddot\theta=0 \quad r=2b \quad \dot r=0$

$$\ddot r=-2b(-2\pi\theta_o/\tau)^2=-8\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2$$

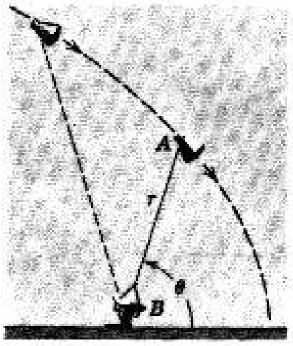
$$a_r=-8\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2-2b(4\pi^2\theta_o^2/\tau^2)=-16\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2$$

$$a_\theta=0 \quad \underline{a=-a_r=16\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2}$$

2.153 - داده‌های موشکی که به زمین باز می‌گردد در زیر آمده است. تندی آن را در $t=40$ s بیابید.

سیاهه 2.153

t, s	r, km	θ, deg	t, s	r, km	θ, deg
0	36.4	110.5	60	19.0	45.0
5	29.9	100.0	70	18.8	38.5
10	26.2	91.0	80	18.7	32.8
15	24.1	83.7	90	18.7	27.0
20	22.7	77.7	100	18.7	21.6
30	20.9	67.7	110	18.8	16.8
40	20.1	58.6	120	19.0	12.0
50	19.3	52.0			

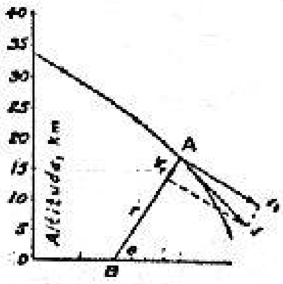


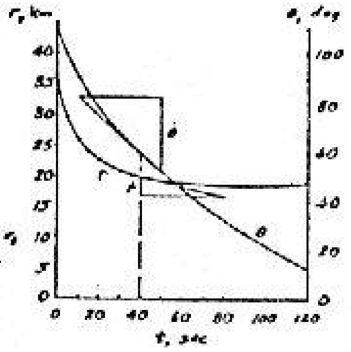
نگاره 2.153

$t=40$ s $\quad r=20100$ m

$\dot r=-11.5$ m/s

$\dot\theta=-0.014$ rad/s





$$v=\sqrt{\dot r^2+(r\dot\theta)^2}$$

$$=\sqrt{(77.5)^2+(20100)^2(0.014)^2}=284 \text{ m/s}$$

$\underline{v=1020 \text{ km/h}}$

www.collegeprozheh.ir

2.154 - بر ذره P در پرسش 2.134 نیرویی در سوی r نمی‌نشیند و در r_0 تندی شعاعی v_r ندارد. اگر P از $r=r_0$ به راه افتد، معادله مسیر چیست؟

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0 \quad d^2r/dt^2-K^2r=0$

$r=A\cosh(Kt)+B\cosh(Kt) \Rightarrow$

$AK^2\cosh(Kt)+BK^2\sinh(Kt)+$

$-AK^2\cosh(Kt)-BK^2\sinh(Kt)=0$

$r=r_o \quad t=0 \Rightarrow r_o=A+0 \quad A=r_o$

$t=0 \quad \dot{r}=0 \Rightarrow r_oK\sinh(Kt)+BK\cosh(Kt)=0$

$0+BK=0 \;,\; B=0 \quad \underline{r=r_o\cosh(Kt)}$

2.155 - هنگامی که $\theta=30^\circ$ می‌شود، شتاب A چیست؟ بادامک از $r=b-c\text{Cos}\theta$ با $b=100$ mm و $c=75$ mm ساخته شده است.

$r=100-75\cos\theta$

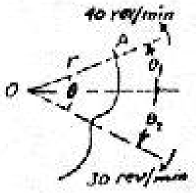
$\dot{r}=75\dot{\theta}\sin\theta$

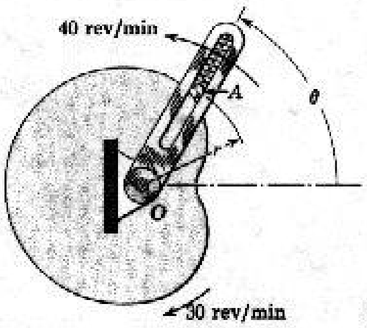
$\ddot{r}=75\dot{\theta}^2\cos\theta$

$\ddot{\theta}=0$

$\dot{\theta}_1=40(2\pi)/60=4\pi/3$ rad/s

$\dot{\theta}_2=30(2\pi)/60=\pi$ rad/s





نگاره 2.155

$\theta=\theta_1+\theta_2 \quad \dot{\theta}=\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2=7\pi/3$ rad/s $\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}_1^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}_1+2\dot{r}\dot{\theta}_1 \quad \theta=30^\circ \quad r=100-75\sqrt{3}/2=35.0$ mm

$\dot{r}=75(7\pi/3)(1/2)=275$ mm/s

$\ddot{r}=75(7\pi/3)^2(\sqrt{3}/2)=3490$ mm/s^2

$a_r=3490-35(4\pi/3)^2=2875$ mm/s^2

$a_\theta=35.0(0)+2(275)(4\pi/3)=2303$ mm/s^2

$a=\sqrt{(2875)^2+(2303)^2}=3680$ mm/s^2 $=$ $\underline{3.68 \text{ m/s}^2}$

2.156 - در پرسش نمونه 2.11 اگر $L=30$ mm و $b=150$ mm و $\omega=4$ rev/s باشند، تندی و شتاب میانه A چیست؟

$\tan\gamma=L/12\pi=30/12\pi=0.7957 \quad \cos\gamma=0.7825$

$v_\theta=b\dot{\theta}=150(4)(2\pi)=3700$ mm/s

www.collegeprozheh.ir

$v=v_\theta/\cos\gamma=3700/0.7825=\underline{4728.4 \text{ mm/s}}$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-150(4\times2\pi)^2=-94748 \text{ mm/s}$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+0=0 \quad a_z=\dot{v}_z=0 \quad a=|a_r|=\underline{9478 \text{ mm/s}^2}$

2.157 - ذره‌ای در فضا دارای $\bar{v}=6\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ m/s و $\bar{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ m/s² است. نشان دهید که تندی و شتاب بر هم عمود است و $\dot{v}$ و ρ را بیابید.

$\underline{a} \perp \underline{v} \Rightarrow a=a_n \;,\; a_t=\underline{\dot{v}=0}$

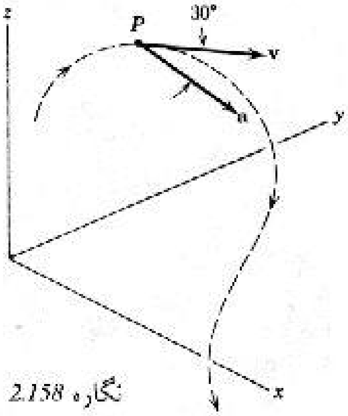
$\underline{v}.\underline{a}=(6\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k}).(2\underline{i}+3\underline{j}-6\underline{k})=12-6-6=0 \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{a}$

$a=|\underline{a}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\sqrt{49}=7 \text{ m/s}^2$

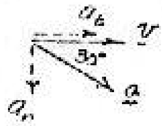
$v=|\underline{v}|=\sqrt{6^2+2^2+1^2}=\sqrt{41}=6.40 \text{ m/s}$

$a=a_n=v^2/\rho \;,\; \rho=v^2/a_n=41/7=\underline{5.86 \text{ m}}$

2.158 - ذره‌ای با $\bar{v}=4\hat{i}+3\hat{j}$ m/s، شتاب 10 m/s² دارد. بردار شتاب و اندازه ρ را بیابید.



نگاره 2.158



$a_n=a\sin30^\circ=10(0.5)=5 \text{ m/s}^2$

$v=|\underline{v}|=\sqrt{3^2+4^2}=5 \text{ m/s}^2 \quad a_n=v^2/\rho$

$\rho=v^2/a_n=5^2/5=\underline{5 \text{ m}}$

$a_t=a\cos30^\circ=10(0.866)=\underline{8.66 \text{ m/s}^2}$

2.159 - دانه‌ای با دستور $x=60\cos\omega t$ و $y=40\sin\omega t$ و $z=30t^2$ و $\omega=2$ rad/s راه‌می‌رود. شتاب آن در $t=4$ s چیست؟

$x=60\cos2t \quad y=40\sin2t$

$T=3t^2 \;+(x/60)^2\;(y/40)^2\;=\cos^2 2t+\sin^2 2t=1$

$\dot{x}=-120\sin2t \quad \ddot{x}=-240\cos2t \quad \dot{y}=80\cos2t \quad \ddot{y}=-160\sin2t$

$\dot{z}=60t \quad \ddot{z}=60 \text{ mm/s} \quad t=4 \text{ s}$

$\omega t=2(4)=8 \text{ rad} \;(=8(180)/\pi=458.4^\circ)$

www.collegeprozheh.ir

$\sin(458.4^\circ)=\sin(98.4^\circ)=0.9874$

$\cos(458.4^\circ)=\cos(98.4^\circ)=-0.1455$

$\ddot{x}=-240(-0.1455)=34.92\ \text{mm/s}^2$

$\ddot{y}=-160(0.9893)=-158.30\ \text{mm/s}^2$

$\Rightarrow a=\sqrt{34.92^2+-158.30^2+60^2}=\underline{172.9\ \text{mm/s}^2}$

2.160 - تندی ارابه‌های سرنشیندار به هنگام گذر از A، $15\ m/s$ و شتاب مماسی آن $gCos\gamma$ است. شتاب سرنشینان چیست؟

$v_\theta=r\dot{\theta}\quad,\quad v_\theta=v\cos\gamma\ \Rightarrow$

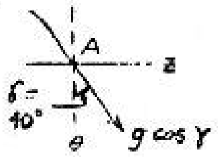
$\dot{\theta}=(v/r)\cos\gamma\quad \dot{\theta}=15(0.7660)/5=2.298\ \text{rad/s}$

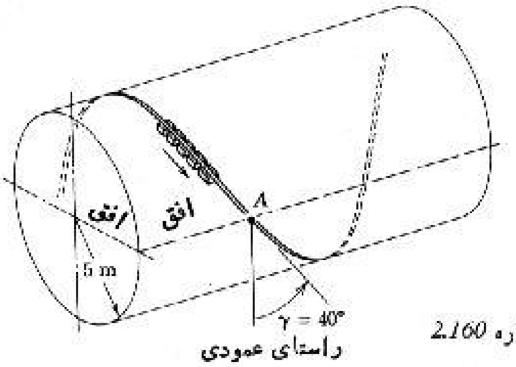
$a_\theta=g\cos^2\gamma=9.81(0.7660)^2=5.76\ \text{m/s}^2$

$a_z=g\cos\gamma\sin\gamma=9.81(0.7660)(0.6429)=4.83\ \text{m/s}^2$

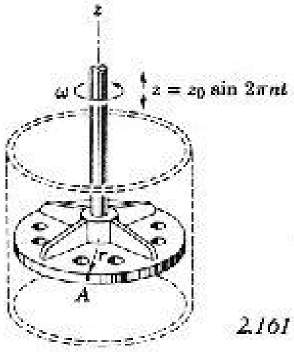
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-5(2.298)^2=-26.41\ \text{m/s}^2$

$a=\sqrt{26.41^2+5.76^2+4.83^2}=\underline{27.5\ \text{m/s}^2}$



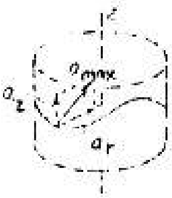


نگاره 2.160



نگاره 2.161

2.161 - شتاب بیشینه نقطه A چیست؟



$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-r\omega^2\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+0=0$

$a_z=d^2(z_o\sin(2n\pi t)/dt^2=-4n^2\pi^2z_o\sin(n\pi t)$

$a=\sqrt{(-r\omega^2)^2+(-4n^2\pi^2z_o\sin(n\pi t))^2}\quad a_{Max.}=\sqrt{r^2\omega^4+16n^4\pi^4z_o^2}$

2.162 - ذره‌های آب با تندی یکنواخت $\dot{l}=c$ از دید لوله، از آن بیرون می‌زند. تندی و شتاب ذره P در لوله چیست؟

$v_r=\dot{l}\sin\beta=c\sin\beta\quad v_\theta=r\dot{\theta}=(l\sin\beta)k=Kl\sin\beta$

www.collegeprozheh.ir

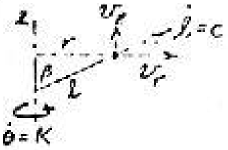
$v_z=\dot{l}\cos\beta=c\cos\beta$

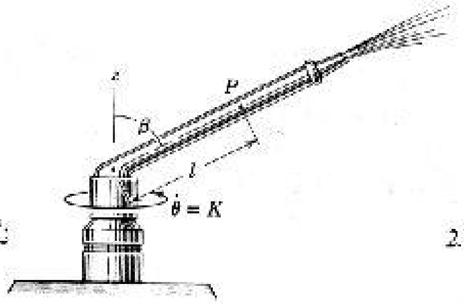
$v=\sqrt{(c\sin\beta)^2+(Kl\sin\beta)^2+(c\cos\beta)^2}=\sqrt{c^2+K^2l^2\sin^2\beta}$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-l(K^2)\sin\beta=-K^2l\sin\beta$

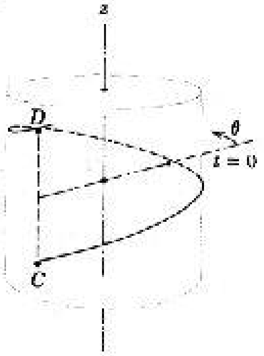
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2c(K)\sin\beta=2Kc\sin\beta \quad a_z=\dot{v}_z=0$

$a=\sqrt{(-K^2l\sin\beta)^2+(2Kc\sin\beta)^2}=K\sin\beta\sqrt{K^2l^2+4c^2}$





نگاره 2.162



نگاره 2.163

2.163 - پیچ پرسش نمونه 2.11 با دستور $\theta=\pi Sin2\pi nt$ باز و بسته می‌شود. شتاب گوی A را در $\theta=\pi$ بیابید. گام پیچ L است.

$v_z=\dot{z} \quad \dot{z}=b\dot{\theta}\tan\gamma=bl\dot{\theta}/2\pi b=l\dot{\theta}/2\pi \quad \theta=\pi\sin(2\pi nt)$

$D:\ \theta=\pi \quad \dot{\theta}=2\pi^2n\cos(2\pi nt) \quad \sin(2\pi nt)=1$

$t=1/4\pi \quad \ddot{\theta}=-4\pi^3n^2\sin(2n\pi t) \Rightarrow \dot{\theta}=0\ \&\ \ddot{\theta}=-4\pi^3n^2$

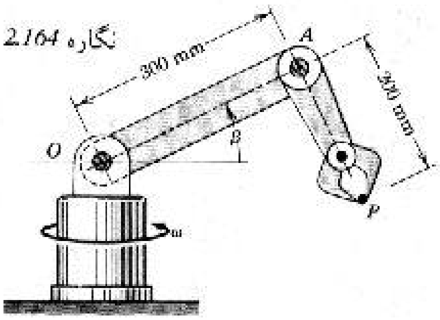
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-b(0^2)=0 \qquad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=b(-4\pi^3n^2)+2(0)(0)=-4b\pi^3n^2$

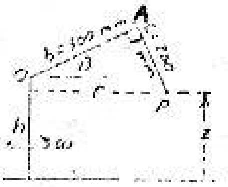
$a_z=dv_z/dt=d(b\dot{\theta}\tan\gamma)/dt=l\ddot{\theta}/2\pi=-2\pi^2n^2l$

$a=\sqrt{0^2+(-4b\pi^3n^2)^2+(-2\pi^2n^2l)^2}=2\pi^3n^2\sqrt{4b^2\pi^2+l^2}$

2.164 - شتاب P را برای $\beta=30^\circ$ و $\dot{\beta}=10$ deg/s و $\ddot{\beta}=20$ deg/s^2 و $\omega=40$ deg/s بیابید. بازوهای ربات، بر هم عمود است.

نگاره 2.164





$\dot{\theta}=\omega=40\pi/180=0.698$ rad/s

$\dot{\beta}=10\pi/180=0.1745$ rad/s

www.collegeprozheh.ir

$\ddot{\beta} = 20\pi/180 = 0.349 \text{ rad/s}^2 \quad r = b\cos\beta + c\sin\beta$

$\dot{r} = (-b\sin\beta + c\cos\beta)\dot{\beta}$

$\ddot{r} = (-b\cos\beta - c\sin\beta)\dot{\beta}^2 + (-b\sin\beta + c\cos\beta)\ddot{\beta}$

$Z = h + b\sin\beta - c\cos\beta \quad , \dot{Z} = (b\cos\beta + c\sin\beta)\dot{\beta}$

$\ddot{Z} = (-b\sin\beta + c\cos\beta)\dot{\beta}^2 + (b\cos\beta + c\sin\beta)\ddot{\beta} \quad \beta = 30^\circ$

$\dot{r} = 4.050 \text{ mm/s} \quad \ddot{r} = -2.860 \text{ mm/s}^2 \quad \ddot{Z} = 126.30 \text{ mm/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2.860 - 359.8(0.698)^2 = -178.23 \text{ mm/s}^2$

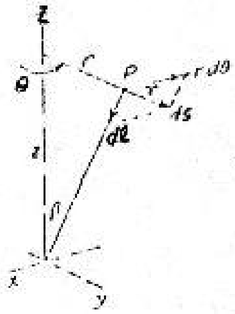
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(4.049)(0.698) = 5.65 \text{ mm/s}^2$

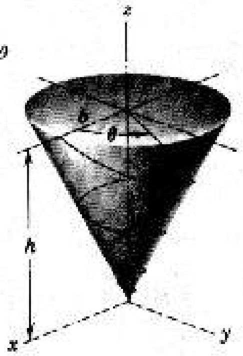
$a_z = \ddot{z} = 126.50 \text{ m/s}^2 \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_z^2 + a_\theta^2} = \underline{218.5 \text{ mm/s}^2}$

2.165 - ذره‌ای بر مسیر مارپیچ مخروطی با $\dot{\theta}$ یکنواخت پایین می‌رود. اگر γ، شیب مسیر، ثابت بماند، a_r چیست؟

$r = bz/h \quad \tan\beta = b/h \quad dl = rd\theta\tan\gamma$

$dr = -dl\sin\beta = -rd\theta\tan\gamma\sin\beta$





نگاره 2.165

$$\int_b^r dr/r = -\tan\gamma\sin\beta \int_0^\theta d\theta$$

$$\ln r \Big|_b^r = -\tan\gamma\sin\beta(\theta)$$

$$\Rightarrow r = be^{-\tan\gamma\sin\beta(\theta)}$$

$r = be^{-k\theta} \quad k = \tan\gamma\sin\beta \quad \dot{r} = -bk\dot{\theta}e^{-\gamma\theta}$

$\ddot{r} = bk^2\dot{\theta}^2e^{-k\theta} \quad \ddot{\theta} = 0 \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = b\dot{\theta}^2e^{-k\theta}(k^2 - 1)$

$\underline{a_r = b\dot{\theta}^2(\tan^2\gamma\sin^2\beta - 1)e^{-\theta\tan\gamma\sin\beta}} \quad \underline{\beta = \tan^{-1}(b/h)}$

2.166 - از نگاره 2.15، مشتق e_R و e_θ و e_ϕ را به زمان بیابید.

$de_R = d\phi e_\phi + (d\theta\cos\phi)e_\theta \quad \underline{\dot{e}_R = \dot{\phi}e_\phi + (\dot{\theta}\cos\phi)e_\theta}$

$de_\theta = (-d\theta\cos\phi)e_R + (d\theta\sin\phi)e_\phi \quad \underline{\dot{e}_\theta = (-\dot{\theta}\cos\phi)e_R + (\dot{\theta}\sin\phi)e_\phi}$

www.collegeprozheh.ir

$d\underline{e}_\phi=-d\phi\underline{e}_R-(d\theta\sin\phi)\underline{e}_\theta$ $\dot{\underline{e}}_\phi=-\dot\phi\underline{e}_R-(\dot\theta\sin\phi)\underline{e}_\theta$

2.167 - به یاری پاسخ پرسش پیش و با مشتق‌گیری از $\underline{R}=R\underline{e}_R$، سایه‌های کروی شتاب را بیابید.

$\underline{R}=R\underline{e}_R$ $\dot{\underline{R}}=\dot R\underline{e}_R+R[\dot\phi\underline{e}_\phi+(\dot\theta\cos\phi)\underline{e}_\theta]$

$\ddot{\underline{R}}=\ddot R\underline{e}_R+\dot R[\dot\phi\underline{e}_\phi+(\dot\theta\cos\phi)\underline{e}_\theta]+\dot R[\dot\phi\underline{e}_\phi+(\dot\theta\cos\phi)\underline{e}_\theta]+R\ddot\phi\underline{e}_\phi+$

$+R\dot\phi(-\dot\phi\underline{e}_R-[\dot\theta\sin\phi]\underline{e}_\theta)+R\ddot\theta\cos\phi\underline{e}_\theta-(R\dot\theta\dot\phi\sin\phi)\underline{e}_\theta+R\dot\theta\cos+$

$\phi[-(\dot\theta\cos\phi)\underline{e}_R+(\dot\theta\sin\phi)\underline{e}_\phi]$

$\Rightarrow \ddot{\underline{R}}=(\ddot R-R\dot\phi^2-R\dot\theta^2\cos^2\phi)\underline{e}_R+$

$+(\dot R\dot\theta\cos\phi-R\dot\theta\dot\phi\sin\phi+R\ddot\theta\cos\phi-R\dot\theta\dot\phi\sin\phi)\underline{e}_\theta+$

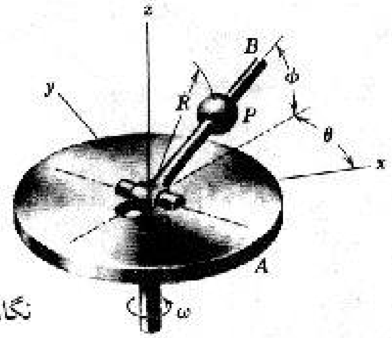
$+(\dot R\dot\phi+\dot R\dot\phi+R\ddot\phi+R\dot\theta^2\sin\phi\cos\phi)\underline{e}_\phi$

$\ddot{\underline{R}}=(\ddot R-R\dot\phi^2-R\dot\theta^2\cos^2\phi)\underline{e}_R+$

$+((\cos\phi/R)d(R^2\dot\theta)/dt-2R\dot\theta\dot\phi\sin\phi)\underline{e}_\theta+$

$+((1/R)d(R^2\dot\theta)/dt+R\dot\theta^2\sin\phi\cos\phi)\underline{e}_\phi$

2.168 - شتاب P، با $\omega=\dot\theta=\frac{\pi}{3}$ rad/s و $\dot\phi=\frac{2\pi}{3}$ rad/s و $R=50+200t^2$ mm در $t=\frac{1}{2}$ s چیست؟



نگاره 2.168

$R=50+200(1/2)^2=100$ mm

$\dot R=400t=400(1/2)=200$ mm/s

$\ddot R=400$ mm/s²

$\theta=\omega t=(\pi/3)(1/2)=\pi/6$ rad

$\dot\theta=\pi/3$ rad/s $\ddot\theta=0$

$\phi=\dot\phi t=(2\pi/3)(1/2)=\pi/3$ rad

$\dot\phi=2\pi/3$ rad/s $\ddot\phi=0$

$\sin\theta=1/2$, $\cos\theta=\sqrt{3}/2$, $\sin\phi=\sqrt{3}/2$, $\cos\phi=1/2$

$d(R^2\dot\theta)/dt=2R\dot R\dot\theta+R^2\ddot\theta=2(0.1)(0.2)\pi/3+0=0.04\pi/3$ m/s²

$d(R^2\dot\phi)/dt=2R\dot R\dot\phi+R^2\ddot\phi=2(0.1)(0.2)2\pi/3+0=0.08\pi/3$ m/s²

www.collegeprozheh.ir

$a_R=-0.0661\ m/s^2 \quad a_\theta=-0.1704\ m/s^2 \quad a_\phi=0.885\ m/s^2$

$a=\sqrt{(-0.0661)^2+(-0.1704)^2+(0.885)^2}=0.904\ m/s^2$

2.169 - گاریهای بازی با دستور $z=(h/2)(1-Cos2\theta)$ بالا و پایین می‌رود. تندی گاریها را در $\theta=\frac{\pi}{4}$ rad و در چارچوب کروی R و θ و ϕ بیابید.

$R=const. \quad \theta=\omega t \quad \sin\phi=Z/R \quad Z=(h/2)(1-\cos2\theta)$,

$\dot{Z}=\omega h\sin2\theta \quad \dot{\theta}=\omega \quad \dot{\phi}\cos\phi=\dot{Z}/R$

$\dot{\phi}=(\omega h\sin2\theta)/(R\cos\phi) \quad v_R=\dot{R}=0$

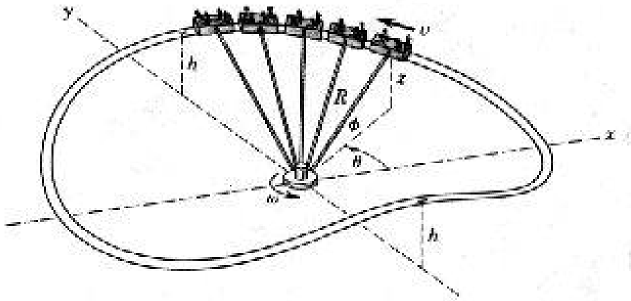
$v_\theta=R\dot{\theta}\cos\phi=R\omega\sqrt{1-\sin^2\phi}=R\omega\sqrt{1-((h/2R)(1-\cos2\theta))^2}$

$v_\phi=R\dot{\phi}=(\omega h\sin2\theta)/\cos\phi$

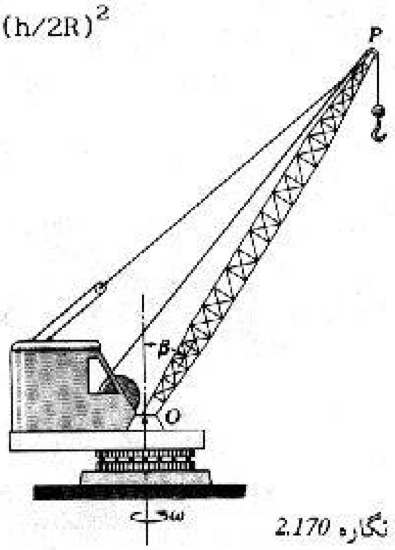
$=h\omega\sin2\theta/\sqrt{1-((h/2R)(1-\cos2\theta))^2}$

$\theta=\omega t=\pi/4 \quad 1-\cos2\theta=1 \Rightarrow v_\theta=R\omega\sqrt{1-(h/2R)^2}$

$v_\phi=h\omega/\sqrt{1-(h/2R)^2}\ ,\ v_R=0$



نگاره 2.169



نگاره 2.170

2.170 - تندی و شتاب P با $OP=24$ m و $\omega=2$ rev/min و $\dot{\beta}=0.1$ rad/s، در $\beta=30^\circ$ چیست؟

$R=24\ m\ const. \quad \dot{\theta}=\omega=2(2\pi)/60=\pi/15\ rad/s \quad \ddot{\theta}=0$

$\beta=30^\circ \quad \phi=\pi/2-\beta \quad \dot{\phi}=-\dot{\beta}=-0.10\ rad/s \quad \ddot{\phi}=-\ddot{\beta}=0$

$v_R=\dot{R}=0 \quad v_\theta=R\dot{\theta}\cos\phi=24(\pi/15)(1/2)=2.51\ m/s$

$v_\phi=R\dot{\phi}=24(-0.10)=-2.4\ m/s$

www.collegeprozheh.ir

$v=\sqrt{(2.51)^2+(2.4)^2}=\underline{3.48\ m/s}$

$a_R=\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi=0-24(-0.10)^2-24(\pi/15)^2(1/2)^2$

$=-0.503\ m/s^2$

$a_\theta=(\cos\phi/R)d(R^2\dot{\theta})/dt-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$

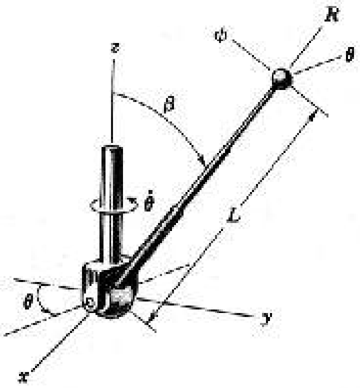
$=0-2(24)(\pi/15)(-0.10)(\sqrt{3}/2)=0.871\ m/s^2$

$a_\phi=(1/R)d(R^2\dot{\phi})/dt+R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$

$=0+24(\pi/15)(1/2)(\sqrt{3}/2)=0.456\ m/s^2$

$a=\sqrt{(-0.503)^2+(0.871)^2+(0.456)^2}=\underline{1.104\ m/s^2}$

2.171 - شتاب کروی نوک میله، با $\dot{\theta}=2\ rad/s$ و $\dot{\beta}=3.2\ rad/s$ و $\dot{L}=0.9\ m/s$، در $\beta=45^\circ$ و $L=1.2\ m$ چیست؟



نگاره 2.171

$\dot{\phi}=-\dot{\beta}\quad R=L\quad \dot{\theta}=\omega$

$a_R=0-1.2(-3/2)^2-1.2(2)^2(1/2)$

$=\underline{-5.10\ m/s^2}$

$a_\theta=(2L\dot{L}\omega+0)\sin\beta/L+2L\omega\dot{\beta}\cos\beta$

$=2\omega(\dot{L}\sin\beta+L\dot{\beta}\cos\beta)$

$=2(2)(0.9/\sqrt{2}+1.2(3/2)/\sqrt{2})$

$=10.8/\sqrt{2}=\underline{7.64\ m/s^2}$

$a_\phi=-2\dot{L}\dot{\beta}+L\omega^2\cos\beta\sin\beta=-2(0.9)(3/2)+1.2(2^2)/2$

$=\underline{-0.3\ m/s^2}$

2.172 - شتاب گاریهای بازی پرسش 2.169 در $\theta=\omega t-\frac{\pi}{2}\ rad$ چیست؟

$\dot{\phi}^2=(\omega h/R)^2\sin^2 2\theta/\cos^2\phi=0\quad \theta=\pi/2$

$\cos^2\phi=1-\sin^2\phi=1-((h/2R)(1-\cos 2\theta))^2$

$=1-(h/R)^2\quad \omega t=\pi/2$

$\Rightarrow a_R=\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi=0-0-\underline{R\omega^2(1-h^2/R^2}\quad \omega t=\pi/2$

$d(R^2\dot{\theta})/dt=R^2\ddot{\theta}=0$ for $\dot{\theta}=\omega=const.$

www.collegeprozheh.ir

$2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi = 2R\omega(\omega h\sin 2\theta)/(R\cos\phi)\sin\phi = 0$ for $\theta = \pi/2$

$\Rightarrow a_\theta = (\cos\phi/R)d(R^2\dot{\theta})/dt - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi = 0$ for $\theta = \pi/2$

$d(R^2\dot{\phi})/dt = R\dot{\phi}^{\cdot} = R\omega h\left\{(\tan\phi/\cos\phi)\dot{\phi}\sin 2\phi + 2\omega\cos 2\theta/\cos\phi\right\}$

$= -2R\omega^2 h/\sqrt{1-(h/R)^2}$

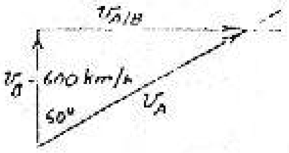
$R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi = R\omega^2 h(1-\cos 2\theta)/2R\sqrt{1-((h/2R)(1-\cos 2\theta))^2}$

$= h\omega^2\sqrt{1-(h/R)^2}$

$a_\phi = (1/R)d(R^2\dot{\phi})/dt + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$

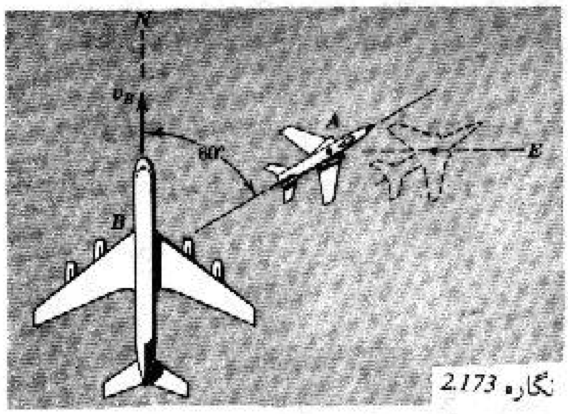
$= -h\omega^2(1+h^2/R^2)/\sqrt{1-h^2/R^2}$ for $\theta = \pi/2$

2.173 - از دید سرنشینان B، هواپیمای A، از پهلو به شرق می‌رود. تندی A و تندی A از دید B را با $v_B = 600$ km/h بیابید.

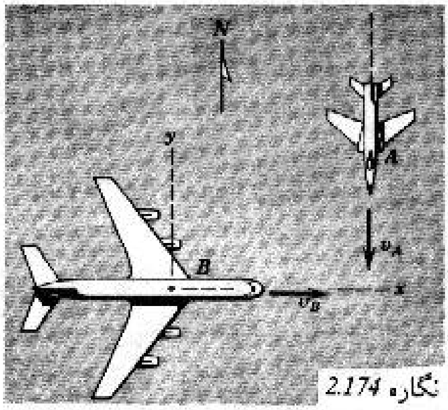


$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{v}_{A/B}$ $\quad v_A = 600/\cos 60^\circ = \underline{1200 \text{ km/h}}$

$v_{A/B} = 600\tan 60^\circ = \underline{1039 \text{ km/h}}$

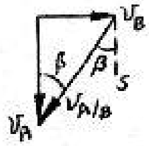


نگاره 2.173



نگاره 2.174

2.174 - تندی A از دید B، با $v_A = 1200$ km/h و $v_B = 800$ km/h چیست؟



$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{v}_{A/B}$ $\quad v_{A/B} = \sqrt{(1200)^2 + (800)^2} = \underline{1442 \text{ km/h}}$

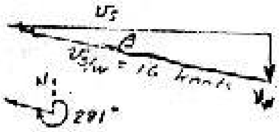
$\beta = \tan^{-1}(800/1200) = 33.7^\circ$ West of South

2.175 - یک کشتی که با تندی 16 گره دریایی در آب ایستاده پیش می‌رود، می‌خواهد در جریان رو به

www.collegeprozheh.ir

جنوب 3 گره دریایی، به سوی باختر برود. سوی کشتی و زمان پیمودن 24 گره دریایی چیست؟

w=water s=ship $\underline{v}_s=\underline{v}_w+\underline{v}_{s/w}$



$\beta=\sin^{-1}(3/16)=10.8^\circ$ Heading=270+10.8=$\underline{281^\circ}$

$t=\text{Dist./Vel.}=24/\sqrt{(16)^2-3^2}=\underline{1.527\ \text{hr}}$

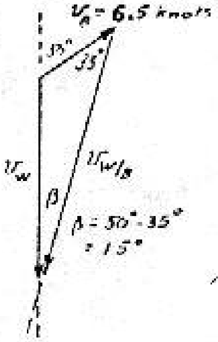
2.176 - اگر بادنما با راستای قایق، زاویه 35° بسازد، تندی باد چیست؟

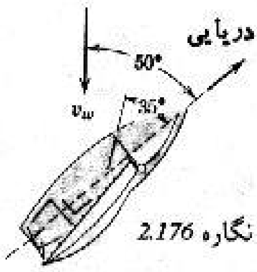
w=wind B=boat $\underline{v}_w=\underline{v}_B+\underline{v}_{w/B}$

$v_w/\sin 35^\circ=6.5/\sin 15^\circ$

$v_w=6.5(0.5736)/0.2588$

$=\underline{14.4\ \text{knots}}$



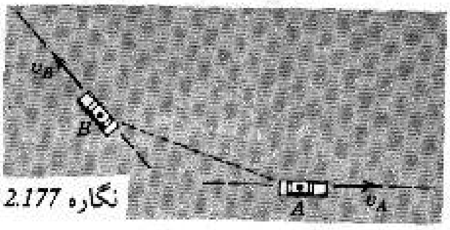


نگاره 2.176

2.177 - اگر آهنگ افزایش AB، برابر تندی نسبی آنها باشد، تندی خودروها چگونه است؟

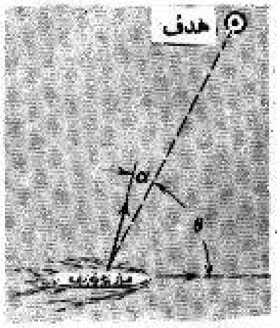
$d(\overline{AB})/dt=|v_{A/B}|$

$\Rightarrow \text{dir.}(v_{A/B})=\text{cte}$



نگاره 2.177

2.178 - ناو، موشکی به تندی 75 m/s از دید خود در $\theta=60^\circ$، با زاویه 30° به بالا پرتاب می‌کند. زاویه α چه باشد که به هدف بخورد؟

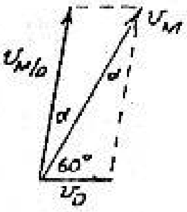


نگاره 2.178

$v_D=30(1.852)=55.6$ km/h

$v_D=55.6/3.6=15.43$ m/s

$v_M=$ سایه افقی تندی موشک



$v_{M/D}=$ سایه افقی تندی موشک از دید کشتی

$=75\cos 30^\circ=65.0$ m/s $\underline{v}_M=\underline{v}_D+\underline{v}_{M/D}$

$\sin\alpha=v_D\sin 60^\circ/v_{M/D}=(5.43/65.0)(\sqrt{3}/2)=0.2058$

$\underline{\alpha=11.88^\circ}$

www.collegeprozheh.ir

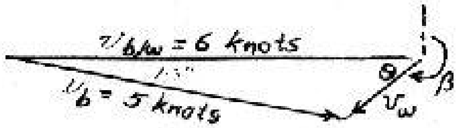
2.179 - قایقی با تندی 6 گره در آب ایستاده، به سوی خاور می‌رود. آب، آن را می‌راند و قایق، دو ساعت پس از راه‌افتادن از A، به B می‌رسد. تندی آب و سوی آن چیست؟

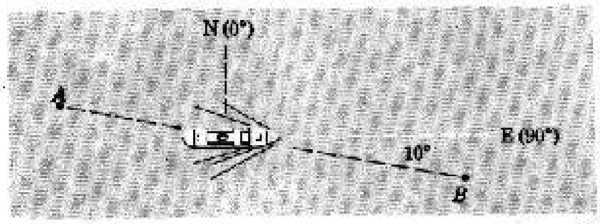
w=water b=boat $\underline{v}_b=\underline{v}_w+\underline{v}_{b/w}$

$v_w^2=5^2+6^2-2(5)(6)\cos10^\circ=1.91$

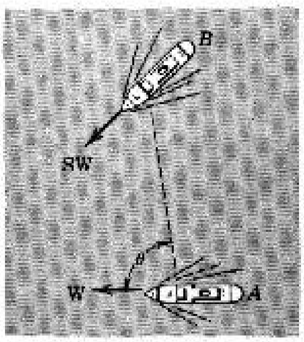
$\underline{v_w=1.38 \text{ knots}}$ $5/\sin\theta=1.38/\sin10^\circ$

$\sin\theta=0.6280$ $\theta=38.9^\circ$ $\beta=270-38.9=\underline{231}$





نگاره 2.179



نگاره 2.180

2.180 - اگر $\theta=80^\circ$ و فاصله AB در ساعت 3.00، 8 مایل دریایی و تندی A، 15 گره باشد، تندی B چیست و چه ساعتی به A می‌خورد؟

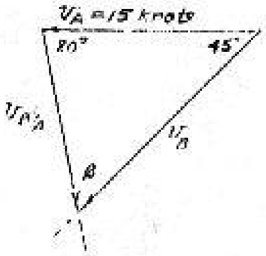
$\underline{v}_B=\underline{v}_A+\underline{v}_{B/A}$ $v_{B/A}/\sin45^\circ=v_A/\sin\beta$

$\beta=180-(80+45)=55^\circ$

$v_{B/A}=15(0.7071)/0.8192=12.95 \text{ knots}$

$t=8/12.95=0.618 \text{ hr}$ $t=37 \text{ min}$

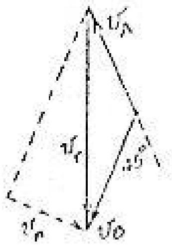
برخورد در 3:37PM رخ می‌دهد.



$v_B/\sin80^\circ=15/\sin55^\circ$

$v_B=15(0.9848/0.8192=\underline{18.0 \text{ knots}}$

2.181 - با $V_A=500$ km/h و $V_B=500$ km/h، تندی B از دید A چیست؟



$\underline{v}_B=\underline{v}_A+\underline{v}_r$ $v_r=v_{B/A}$ $v_A=500$ km/h $v_B=500$ km/h

$v_r^2=(500)^2+(500)^2+2(500)(500)\cos45^\circ$

$=854(10)^3 \text{ (km/h)}^2$

$\underline{v_r=92.4 \text{ km/h}}$ $v_n=500\cos45^\circ=\underline{354 \text{ km/h}}$

2.182 - اگر در پرسش پیش، شتاب A، 3 km/h و شتاب B، 4- km/h باشد، شتاب B از دید A

www.collegeprozheh.ir

چیست؟

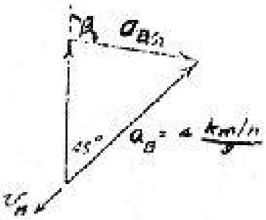
$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A}$

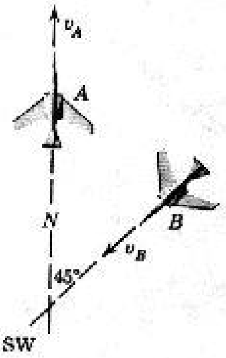
$(a_{B/A})^2=3^2+4^2-2(3)(4)\cos45^\circ=8.03\ (\text{km/h/s})^2$

$a_{B/A}=2.83\ \text{km/h/s}\ =\underline{0.787\ \text{m/s}^2}$

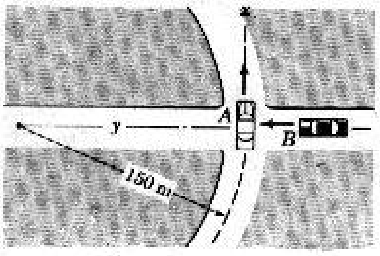
$4^2=3^2+(2.83)^2+2(3)(2.83)\cos\beta$

$\cos\beta=-1.030/17.00=-0.0606 \qquad \underline{\beta=93.5^\circ}$

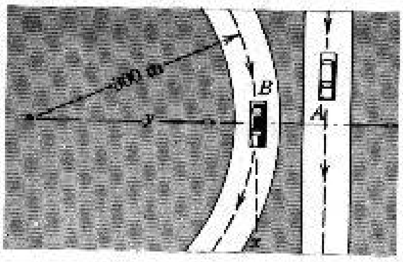




نگاره 2.181



نگاره 2.183



نگاره 2.184

2.183 - تندی یکنواخت A $54\ \text{km/h}$ و تندی و شتاب B $81\ \text{km/h}$ و $3\ \text{m/s}^2$ است. تندی و شتاب A از دید B چیست؟

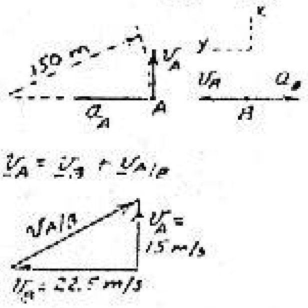
$v_A=54/3.6=15\ \text{m/s} \quad v_B=81/3.6=22.5\ \text{m/s}$

$a_A=v_A^2/\rho=15^2/150=1.5\ \text{m/s}^2$

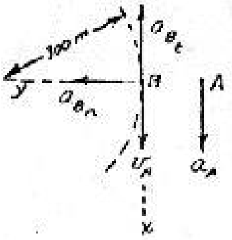
$a_B=3\ \text{m/s}^2 \quad \underline{v}_A=\underline{v}_B+\underline{v}_{A/B} \quad \underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B}$

$v_{A/B}=\sqrt{(22.5)^2+(15)^2}=27.0\ \text{m/s}$

$\underline{\underline{v}_{A/B}=15\underline{i}-22.5\underline{j}\ \text{m/s}} \quad \underline{a}_{A/B}=4.5\underline{j}\ \text{m/s}^2$



2.184 - تندی و شتاب A $100\ \text{km/h}$ و $8\ \text{km/h}$ و تندی و شتاب B $100\ \text{km/h}$ و $-8\ \text{km/h}$ است. شتاب B از دید A چیست؟

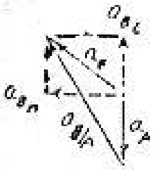


$a_{B_t}=8/3.6=2.22\ \text{m/s}^2 \quad a_A=8/3.6=2.22\ \text{m/s}^2$

$a_{B_n}=v_B^2/\rho=(100/3.6)^2/300=2.57\ \text{m/s}^2$

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A} \quad -2.22\underline{i}+2.57\underline{j}=2.22\underline{i}+\underline{a}_{B/A}$

$\underline{\underline{a}_{B/A}=-4.44\underline{i}+2.57\underline{j}\ \text{m/s}^2}$



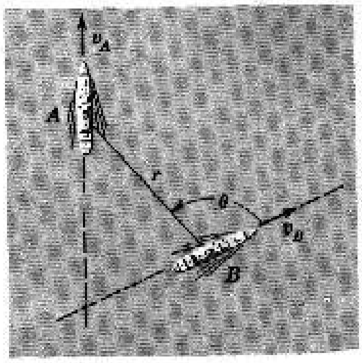
www.collegeprozheh.ir

2.185 - نشان دهید که $\ddot{r}=r\dot{\theta}^2$ و $\ddot{\theta}=2\dot{r}\dot{\theta}/r$ است.

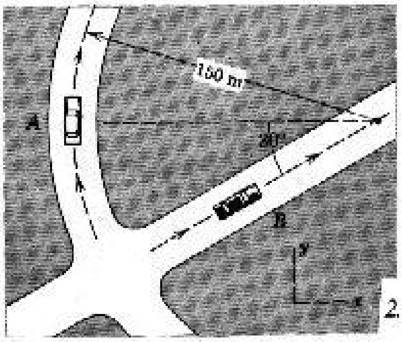
$\underline{a}_A=\underline{a}_B=\underline{0} \Rightarrow \underline{a}_{A/B}=\underline{0}$ (polar coordinates)

$(a_{A/B})_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0 \Rightarrow \ddot{r}=r\dot{\theta}^2$

$(a_{A/B})_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0 \quad \underline{\ddot{\theta}=-2\dot{r}\dot{\theta}/r}$



نگاره 2.185



نگاره 2.187

2.186 - نشان دهید که برای سه ذره هم صفحه، دستورهای زیر درست است.

$\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_{A/C}+\vec{v}_{C/B} \qquad \vec{a}_{A/B}=\vec{a}_{A/C}+\vec{a}_{C/B}$

$\underline{v}_A=\underline{v}_B+\underline{v}_{A/B} \quad \underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B} \quad \underline{v}_C=\underline{v}_B+\underline{v}_{C/B} \quad \underline{a}_C=\underline{a}_B+\underline{a}_{C/B}$

$\underline{v}_A=\underline{v}_C+\underline{v}_{A/C} \quad \underline{a}_A=\underline{a}_C+\underline{a}_{A/C} \Rightarrow \underline{v}_A-\underline{v}_C=\underline{v}_{A/B}-\underline{v}_{C/B}$

$\underline{v_{A/B}=v_{A/C}+v_{C/B}}$ ، $\underline{a_{A/B}=a_{A/C}+a_{C/B}}$

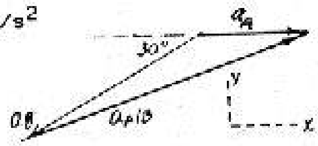
2.187 - تندی A، 50 km/h و شتاب B، 8- km/h/s است. شتاب A از دید B چیست؟

$\underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B} \quad a_A=v^2/\rho=(50/3.6)^2/150=1.28 \text{ m/s}^2$

$a_B=8/3.6=2.22 \text{ m/s}^2$

$a_{A/B}=(2.22\cos30^\circ+1.28)\underline{i}+2.22\sin30^\circ\underline{j}$

$=3.21\underline{i}+1.11\underline{j} \text{ m/s}^2$



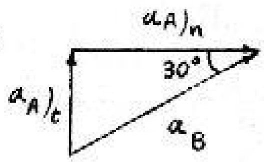
2.188 - در پرسش پیش، خودروی B شتاب می‌گیرد و خودروی A نیز با تندی 50 km/h شتاب دارد. اگر شتاب A از دید B صفر باشد، شتاب B و A چیست؟

$\underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B} \quad \underline{a}_{A/B}=0 \Rightarrow \underline{a}_A=\underline{a}_B$

$(a_A)_n=v^2/\rho=(50/3.6)^2/150=3.87 \text{ m/s}^2$

$(a_A)_t=\dot{v}_A=1.28\tan30^\circ=0.739 \text{ m/s}^2$

$a_B=1.28/\cos30^\circ=1.478 \text{ m/s}^2$



www.collegeprozheh.ir

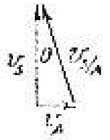
2.189 - ماهواره‌ای در یک مدار قطبی در بلندی 240 km با تندی 2740 km/h به گرد زمین می‌گردد. حرکت ماهواره در گذر از استوا و از جنوب به شمال، از دید بیننده زمین چگونه است؟ شعاع زمین 6378 km و تندی چرخشی آن 0.729×10^{-4} rad/s است.

S=satellite A=observer $\underline{v}_S=\underline{v}_A+\underline{v}_{S/A}$

$v_A=R\omega=6378(0.729)(10^{-4})(3600)=1674$ km/h (East)

$v_S=27940$ km/h (North)

$\theta=\tan^{-1}(1674/27940)=3.43°$



موشک از $3.43°$ غربِ جنوب می‌گذرد.

2.190 - زاویه دید β و راستای b-b چگونه باشد که ناویز S گمان کند از روبرو به مریخ نزدیک می‌شود؟

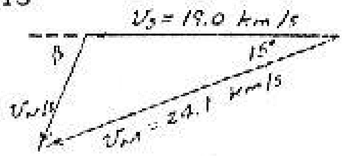
$\underline{v}_M=\underline{v}_S+\underline{v}_{M/S}$

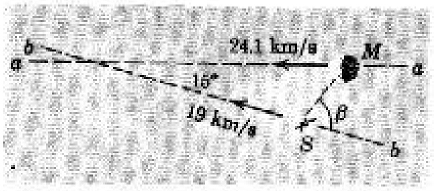
$(\underline{v}_{M/S})^2=(19.0)^2+(24.1)^2-2(19.0)(24.1)\cos15°$

$=57.2$ (km/s)^2

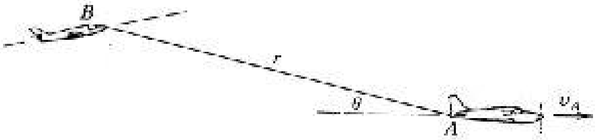
$v_{M/S}=7.56$ km/s $24.1/\sin(\pi-\beta)=7.56/\sin15°$

$\sin(\pi-\beta)=\sin\beta=0.8246$ $\underline{\beta=55.6°}$



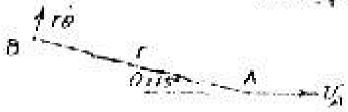


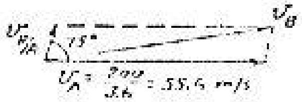
نگاره 2.190



نگاره 2.191

2.191 - هواپیمای A با تندی یکنواخت 200 km/h گلایدر B را با ریسمان r=60 m می‌کشد. اگر $\dot\theta=5$ deg/s باشد، تندی و شتاب گلایدر در $\theta=15°$ چیست؟





$\underline{v}_B=\underline{v}_A+\underline{v}_{B/A}$ $v_{B/A}=r\dot\theta=60(5\pi/180)=5.24$ m/s

$v_B^2=(5.24)^2+(55.6)^2+2(5.24)(55.6)\cos15°$

$=3264$ (m/s)^2

$v_B=57.1$ m/s or $v_B=57.1(3.6)=\underline{206 \text{ km/h}}$

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A}$ $a_A=0$, $a_{B/A}=r\dot\theta^2=60(5\pi/180)^2=0.457$ m/s^2

$\Rightarrow a_B=a_{B/A}=\underline{0.457 \text{ m/s}^2}$ B to A

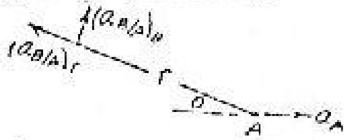
www.collegeprozheh.ir

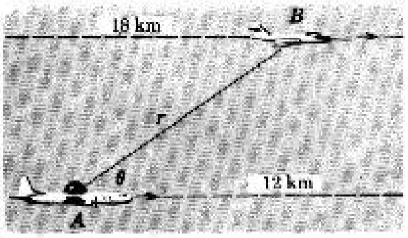
2.192 - اگر در پرسش پیش، هواپیمای A با آهنگ $5\ km/h$ شتاب بگیرد و ریسمان را با آهنگ $r=2\ m/s$ شل کند و θ ثابت بماند، شتاب B چیست؟

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A}\qquad (a_{B/A})_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-0=0$

$(a_{B/A})_n=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+0=0$

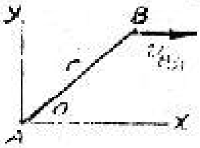
$\Rightarrow\ a_B=a_A=5/3.6=\underline{1.39\ m/s^2}$





نگاره 2.193

2.193 - هواپیمای A، $1.2\ m/s^2$ شتاب دارد و با تندی $1000\ km/h$ پیش می‌رود. اگر تندی B، $1500\ km/h$ و $\theta=30^\circ$ باشد، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟



$\underline{v}_B=\underline{v}_A+(\underline{v}_{B/A})_r+(\underline{v}_{B/A})_\theta$

$v_{B/A}=v_B-v_A=[(1500-1000)/3.6]=142.86\ m/s$

$(\underline{v}_{B/A})_r=v_{B/A}\cos\theta=\dot{r}\qquad \dot{r}=142.86(0.866)=123.72\ m/s$

$r=6000/\sin30^\circ=12000\ m$

$(\underline{v}_{B/A})_\theta=-v_{B/A}\sin\theta=r\dot{\theta}$

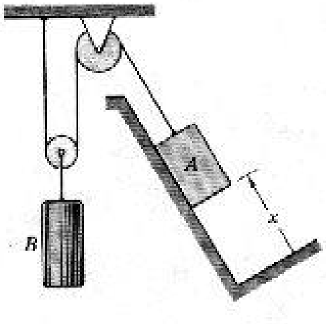
$\Rightarrow\ \dot{\theta}=-142.86(0.5)/12000=-0.006\ rad/s$

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+(\underline{a}_{B/A})_r+(\underline{a}_{B/A})_\theta\qquad a_B=0\qquad a_A=1.2\ m/s^2$

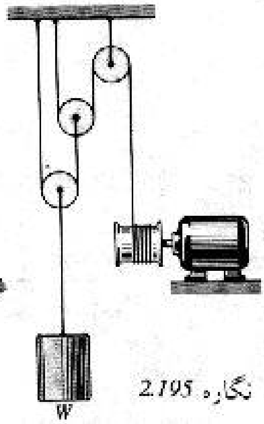
$(\underline{a}_{B/A})_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\ \ -1.28\cos30=\ddot{r}-12000(-0.006)^2$

$\underline{\ddot{r}=-0.676\ m/s^2}\qquad (\underline{a}_{B/A})_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

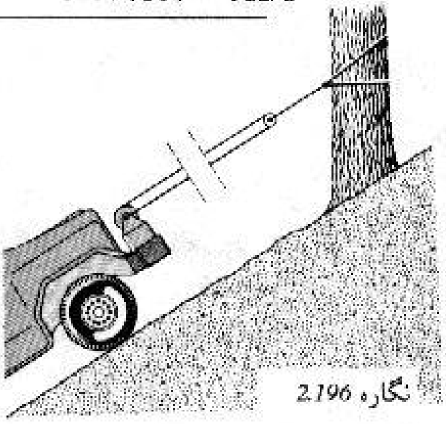
$1.28\cos30=12000\ddot{\theta}+2(123.72)(-0.006)\qquad \underline{\ddot{\theta}=1.77(10)^{-4}\ rad/s}$



نگاره 2.194



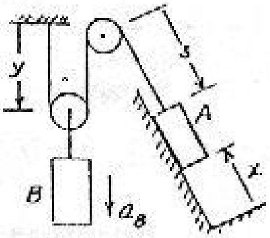
نگاره 2.195



نگاره 2.196

www.collegeprozheh.ir

2.194 - با $x=0.044$ m/s، شتاب B چیست؟



$L=2y+s+const.$ $\quad 0=2\dot{y}+\dot{s}$ $\quad 0=2\ddot{y}+\ddot{s}$

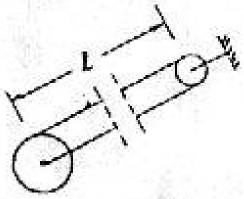
$a_B=\ddot{y}=-\ddot{s}/2=+\ddot{x}/2$

$a_B=0.044/2=\underline{0.022\ m/s^2}$

2.195 - اگر ریسمان را با تندی 320 mm/s بکشیم، پس از 5 ثانیه، w چه اندازه بالا می‌آید.

$v_W=320/4=80$ mm/s $\quad h=80(5)=\underline{400}$ mm

2.196 - اگر خودرو، ریسمان را با تندی 40 mm/s بکشد، کی می‌تواند 4 m بر شیب بالا رود؟

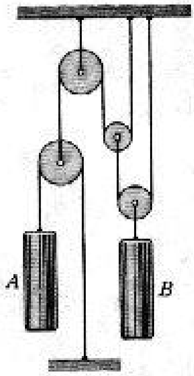


$L=2l$ $\quad \dot{L}=2\dot{l}=40$ mm/s

$t=4(10)^3/20=200$ s $\quad \underline{3\ min\ 20\ s}$

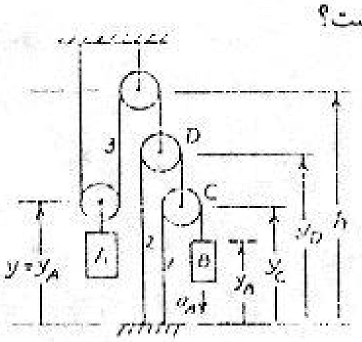
2.197 - اگر A با v_A پایین آید، B با چه تندی بالا می‌رود؟

$ds_B=ds_A/8 \Rightarrow \underline{v_B=v_A/8}$



نگاره 2.197

2.198 - با $y=\frac{t^2}{2}$، شتاب B چیست؟



$y=y_A=t^2/4$ m $\quad \dot{y}_A=t/2$ m/s $\quad a_A=\ddot{y}_A=1/2$ m/s² one dof

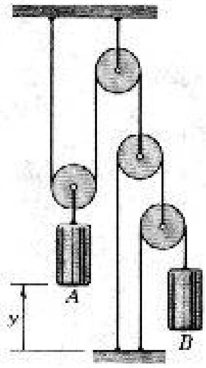
Cable: $L_1=y_C+(y_C-y_B)+C_1$ $\quad 0=2\ddot{y}_C-\ddot{y}_B$ $\quad a_B=-\ddot{y}_B$

$L_2=y_D+(y_D-y_C)+C_2$ $\quad 0=2\ddot{y}_D-\ddot{y}_C$

$L_3=2(h-y_A)+h-y_D+C_3$ $\quad 0=-2\ddot{y}_A-\ddot{y}_D$

$\Rightarrow \ddot{y}_C\ ,\ \ddot{y}_D\ ,\ \ddot{y}_B=-8\ddot{y}_A\ ,\ a_B=8\ddot{y}_A=\underline{4\ m/s^2}$

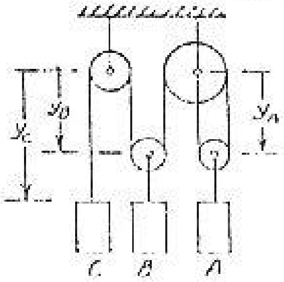
$-dy_B=8dy_A \Rightarrow a_B=8a_A=8(1/2)=4$ m/s²)



نگاره 2.198

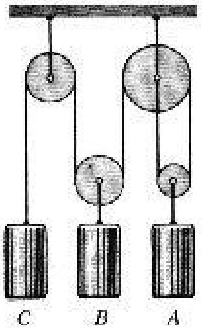
www.collegeprozheh.ir

2.199 - دستور وابستگی شتاب A و B و C چیست؟ شمار آزادی چند است؟

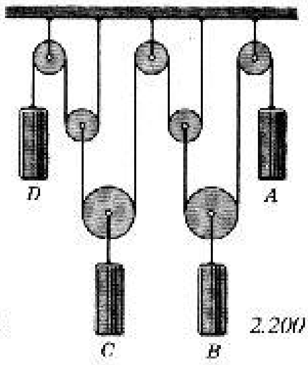


$L=2y_A+2y_B+y_C+\text{const.}\quad 0=2\dot{y}_A+2\dot{y}_B+\dot{y}_C$

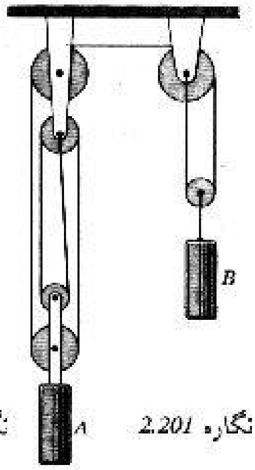
$0=2\ddot{y}_A+2\ddot{y}_B+\ddot{y}_C\quad \underline{2a_A+2a_B+a_C=0}\quad$ 2 dof



نگاره 2.199

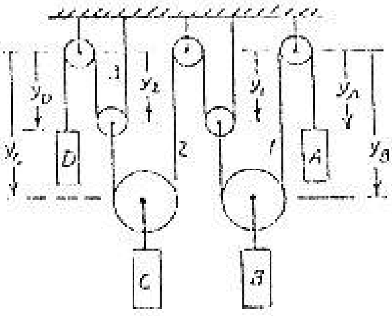


نگاره 2.200



نگاره 2.201

2.200 - دستور وابستگی تندی وزنه‌ها چیست؟ شمار آزادی چند است؟



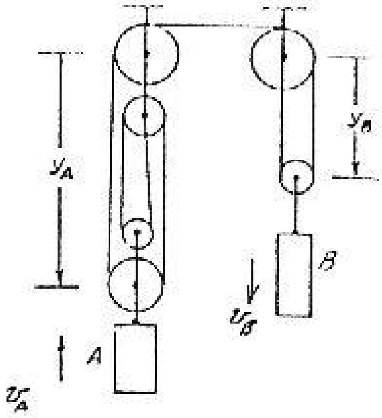
3 dof $\quad L_1=y_B+y_A+(y_B-y_1)+C_1$

$0=2\dot{y}_B+\dot{y}_A-\dot{y}_1$

$L_2=y_C+2y_1+(y_C-y_2)+C_2\quad 0=2\dot{y}_C+2\dot{y}_1-\dot{y}_2$،

$L_3=2y_2+y_D+C_3\quad 0=2\dot{y}_2+\dot{y}_D\Rightarrow$

$\underline{4v_A+8v_B+4v_C+v_D=0}$



2.201 - با $v_B=t^2/2+t^3/6$، شتاب A در $t=2$ s چیست؟

$L=4y_A+2y_B\quad 0=4\dot{y}_A+2\dot{y}_B\quad 0=4\ddot{y}_A+2\ddot{y}_B$

$a_A=-\ddot{y}_A=\ddot{y}_B/2=a_B/2\quad v_B=t^2/2+t^3/6$

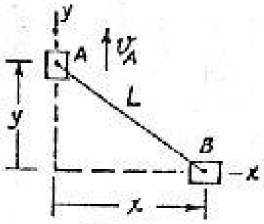
$a_B=\dot{v}_B=t+t^2/4$

$t=2$ s $\quad a_B=2+4/2=4$ m/s^2

$\Rightarrow a_A=a_B/2=\underline{2\text{ m/s}^2}$

www.collegeprozheh.ir

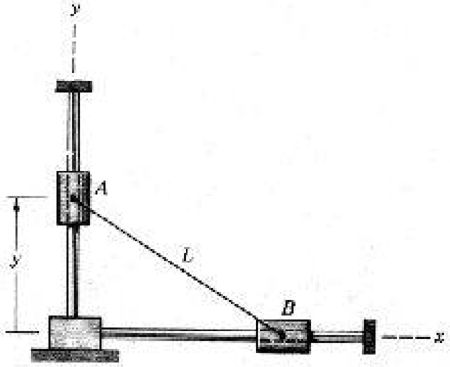
2.202 - با v_A رو به بالا، شتاب B چیست؟



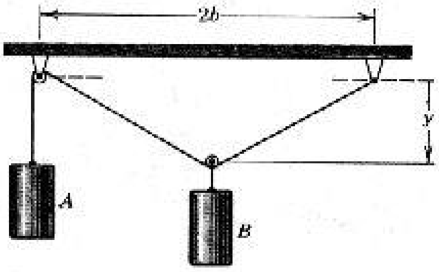
$x^2+y^2=L^2$ $\quad x\dot{x}+y\dot{y}=0$ $\quad \dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{y}^2+y\ddot{y}=0$

$\dot{y}=v_A$, $\ddot{y}=0 \Rightarrow a_x=\ddot{x}=-(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/x=-(\dot{y}^2y^2/x^2+\dot{y}^2)/x$

$a_x=-L^2\dot{y}^2/x^3=-L^2v_x^2/(L^2-y^2)^{3/2}$

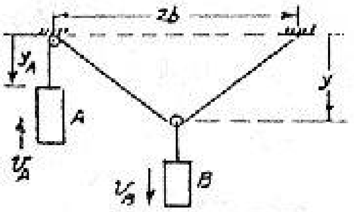


نگاره 2.202



نگاره 2.203

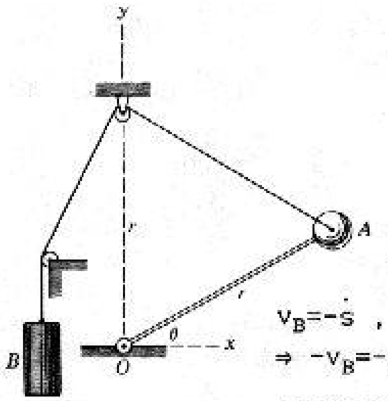
2.203 - وابستگی تندی A و B چیست؟



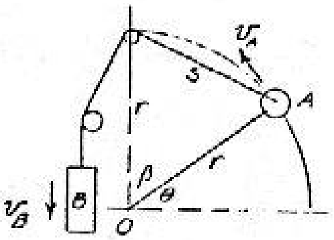
$L=y_A+2\sqrt{y_B^2+b^2}$ $\quad 0=\dot{y}_A+2y\dot{y}/\sqrt{y_B^2+b^2}$

$v_A=-\dot{y}_A$ $\quad v_B=\dot{y} \Rightarrow v_A=2yv_B/\sqrt{y_B^2+b^2}$

2.204 - وابستگی تندی A و B چیست؟



نگاره 2.204



$v_B=-\dot{s}$, $v_A=r\dot{\theta}=-r\dot{\beta}$ $\quad s=2r\sin(\beta/2)$ $\quad \dot{s}=r\dot{\beta}\cos(\beta/2)$

$\Rightarrow -v_B=-v_A\cos(\beta/2)$

$\cos(\beta/2)=\cos(\pi/4-\theta/2)=(\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2))/\sqrt{2}$

$v_B=v_A(\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2))/\sqrt{2}$

$v_A=v_B\sqrt{2}/(\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2))$

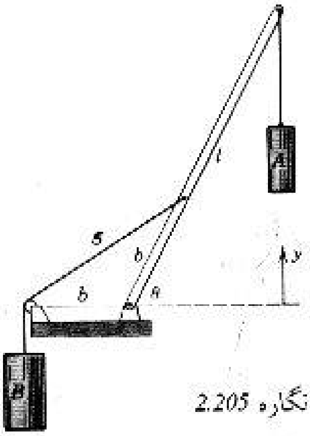
www.collegeprozheh.ir

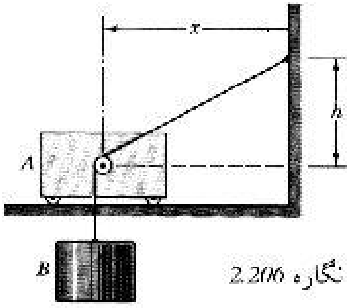
2.205 - با v_B رو به پایین، تندی A رو به بالا چیست؟

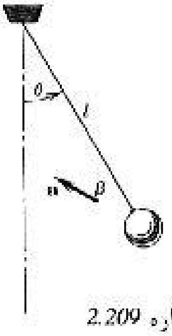
$s^2=2b^2+2b^2\cos\theta=2b^2(1+\cos\theta)$ $2s\dot{s}=2b^2(-\dot{\theta}\sin\theta)$

$v_B=-\dot{s}=(b^2\dot{\theta}/2)\sin\theta$ $y=l\sin\theta$ $(v_A)_y=\dot{y}=l\dot{\theta}\cos\theta$

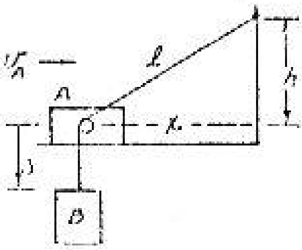
$\Rightarrow (v_A)_y=5v_B l\cos\theta/(b^2\sin\theta)=lv_B\sqrt{2(1+\cos\theta)}/b\tan\theta$


نگاره 2.205


نگاره 2.206


نگاره 2.209

2.206 - وابستگی تندی A و B چیست؟



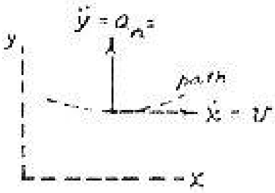
$l^2=x^2+h^2$ $l\dot{l}=x\dot{x}$ $\dot{y}=-\dot{l}=-x\dot{x}/l$

$v_A=-\dot{x} \Rightarrow (v_B)_y=\dot{y}=xv_A/l$

$\dot{y}=0$ $\ddot{x}=0$ $\ddot{y}=a_n=9$ mm/s²

$a_n=\ddot{y}=v^2/\rho$ $\rho=v^2/a_n=6^2/9=4$ mm

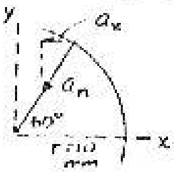
2.207 - ذره‌ای با $\dot{x}=60$ mm/s و $\ddot{x}=0$ و $\dot{y}=0$ و $\ddot{y}=90$ mm/s² حرکت می‌کند. ρ چیست؟



$\dot{y}=0$ $\ddot{x}=0$ $\ddot{y}=a_n=90$ mm/s² $a_n=\ddot{y}=v^2/\rho$,

$\rho=v^2/a_n=60^2/90=40$ mm $\dot{x}=v=60$ mm/s

2.208 - ذره‌ای با دستور $r=10$ mm و $\theta=4t$ rad حرکت می‌کند. $\ddot{x}$ در $\theta=60°$ چیست؟



$\theta=4t$ $\dot{\theta}=4$ rad/sec $\ddot{\theta}=0$

$\Rightarrow a=a_n=r\dot{\theta}^2=10(4)^2=160$ mm/s²

$a_x=-a_n\cos60°=-160(0.5)$ $\ddot{x}=a_x=-80$ mm/s²

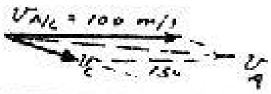
www.collegeprozheh.ir

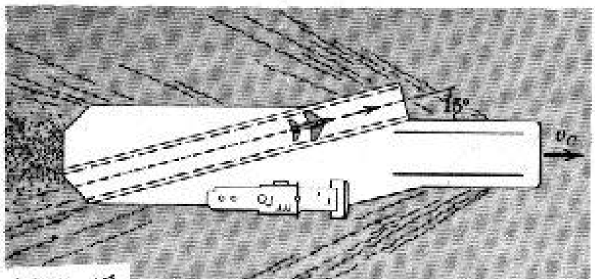
2.209 - شتاب گلوله با راستای نخ، زاویه β می‌سازد. در این هنگام، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

$$a_t=-l\ddot{\theta}=a\sin\beta \qquad \ddot{\theta}=-(a/l)\sin\beta$$

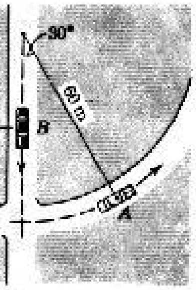
$$a_n=l\dot{\theta}^2=a\cos\beta \qquad \dot{\theta}=\pm\sqrt{(a/l)\cos\beta}$$

2.210 - ناو با تندی 30 گره پیش می‌رود و هواپیما را با شتاب $50\ m/s^2$ در باند 100 متری به پرواز درمی‌آورد. تندی هواپیما به هنگام برخاست چیست؟





نگاره 2.210



نگاره 2.211

$$v_{A/C}^2=2as=2(50)100=10000\ (m/s)^2 \qquad v_{A/C}=100\ m/s$$

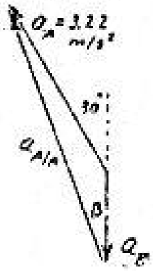
$$\underline{v}_A=\underline{v}_C+\underline{v}_{A/C} \qquad v_C=30(1.852)/3.6=15.43\ m/s$$

$$v_A^2=(100)^2+(15.43)^2+2(100)(15.43)\cos15^\circ$$

$$=13220\ (m/s)^2$$

$$v_A=115.0\ m/s\ ,\quad v_A=v=115.0(3.6)=414\ km/h$$

2.211 - تندی یکنواخت A، $50\ km/h$ و شتاب B، $1.5\ m/s^2$ است. در این هنگام، شتاب A از دید B چیست؟



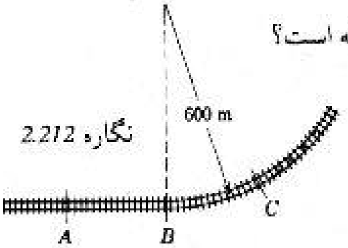
$$\underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B} \qquad a_A=v^2/\rho=(50/3.6)^2/60=3.22\ m/s^2$$

$$a_{A/B}=\sqrt{(3.22\sqrt{3}/2+1.5)^2+(3.22/2)^2}=4.58\ m/s^2$$

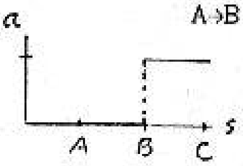
$$\beta=\tan^{-1}(1.608/4.28)=\tan^{-1}(0.3752)$$

$=20.6^\circ$ west of north $\quad a_A=3.22\ m/s^2 \quad a_B=1.5\ m/s^2$

2.212 - شتاب قطاری با تندی $150\ km/h$ در بازه A تا C چگونه است؟



نگاره 2.212



$A\to B:\ a=0\ ,\quad B\to C:\ a=a_n=v^2/\rho$

$$a_n=(150/3.6)^2/600$$

$$=2.89\ m/s^2$$

www.collegeprozheh.ir

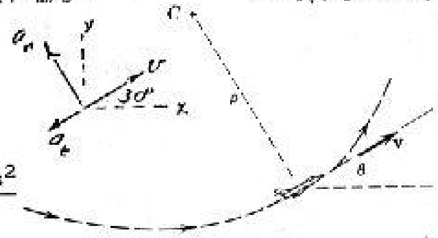
2.213 - در $\theta=30^\circ$، تندی و شتاب هواپیما 1000 km/h و 15- km/h/s است. اگر $\rho=1.5$ km باشد، $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ چیست؟

$v=1000/3.6=278$ m/s $a_t=15/3.6=4.17$ m/s²

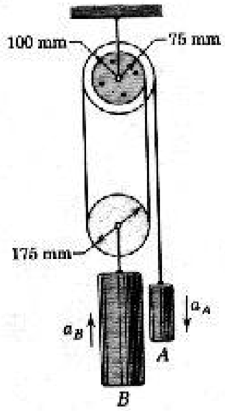
$a_n=v^2/\rho=(278)^2/1500=51.4$ m/s²

$\ddot{x}=-51.4\sin 30^\circ=\underline{-29.3\ m/s^2}$

$\ddot{y}=51.4\cos 30^\circ-4.17\sin 30^\circ=\underline{42.5\ m/s^2}$

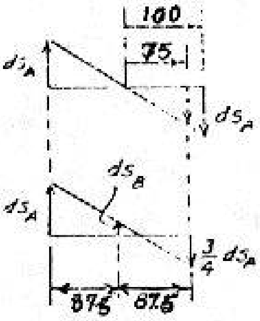


نگاره 2.213



نگاره 2.214

2.214 - اگر شتاب A، 2 m/s² باشد، شتاب B چیست؟



$ds_B=\text{average } ds_A$

$=(-75/100)ds_A$

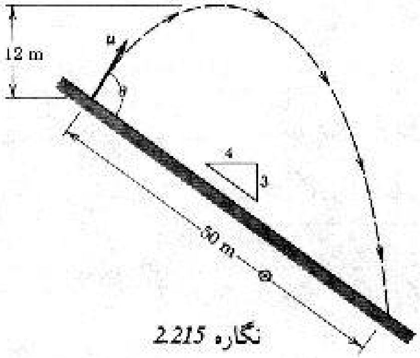
$=(1/2)(ds_A-(3/4)ds_A)$

$=ds_A/8$

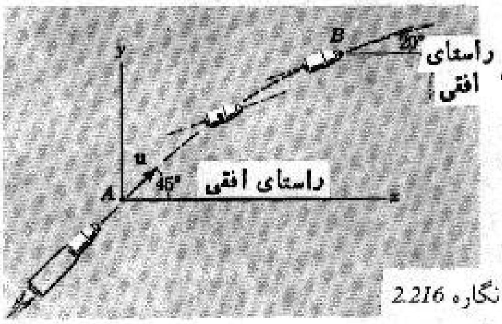
$\Rightarrow a_B=a_A/8=2/8$

$\underline{=0.25\ mm/s^2}$ 2

2.215 - اندازه u و θ چیست؟



نگاره 2.215



نگاره 2.216

y-direction: $v^2=v_1^2+2as$; $0=u_y^2-2g(12)$

A→B: $u_y=\sqrt{2(9.81)(12)}=15.34$ m/s

$s=v_1t+at^2/2$ $-30=15.34t-9.81t^2/2$

$t^2-3.128t-6.116=0$ $t=4.49$ s , ($t=-1.36$ s)

x-direction: $40=u_x(4.49)$ $u_x=8.91$ m/s

$u=\sqrt{(8.91)^2+(15.34)^2}=\underline{17.74\ m/s}$

$\theta_1=\tan^{-1}(15.34/8.91)=59.86^\circ \quad \theta_2=\tan^{-1}(3/4)=36.87^\circ$

$\theta=\theta_1+\theta_2=59.86+36.87=\underline{96.7^\circ}$

2.216 - موشک با تندی $15000\ km/h$ و موتور خاموش به A می‌رسد و تا B می‌رود. اگر $g=9\ m/s^2$ باشد، زمان گذر از A تا B چیست؟

$\ddot{y}=-g \quad \dot{y}=u\sin45^\circ-gt \quad y=ut\sin45^\circ-gt^2/2$

$\ddot{x}=0 \quad \dot{x}=u\cos45^\circ \quad x=ut\cos45^\circ$

$dy/dx=\dot{y}/\dot{x}=1-gt\sqrt{2}/u=1-2gx/u^2$,

$x=(u^2/2g)(1-dy/dx) \quad dy/dx=\tan20^\circ=0.364$

$x=(15)^2(10^6)^2(1-0.364)/[(3600)^2(2)(9)(10^{-3})]$
$=613\ km$

$t=x/(u\cos45^\circ)=0.0578\ h=\underline{3\ min\ 28\ s}$

$h=y=15(10^3)(0.0578)/\sqrt{2}-9(10^{-3})(0.0578)^2(3600)^2/2=$
$=\underline{418\ km}$

2.217 - ذره‌ای با دستور $v=2+0.3t^2\ m/s$ و با شتاب $2.4\ m/s^2$ در $t=2\ s$، در یک صفحه حرکت می‌کند، ρ چیست؟

$v=2+0.3t^2 \quad a_t=\dot{v}=0.6t \quad t=2\ s$

$v=2+0.3(2^2)=3.2\ m/s \quad a_t=0.6(2)=1.2\ m/s^2$

$a^2=a_t^2+a_n^2 \quad a_n^2=2.4^2-1.2^2=4.32 \quad a_n=2.078\ m/s^2$

$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=3.2^2/2.078=\underline{4.93\ m}$

2.218 - اگر در $\theta=60^\circ$، $r=700\ m$ و $\dot{\theta}=0.03\ rad/s$ و $a=20\ m/s^2$ باشد، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

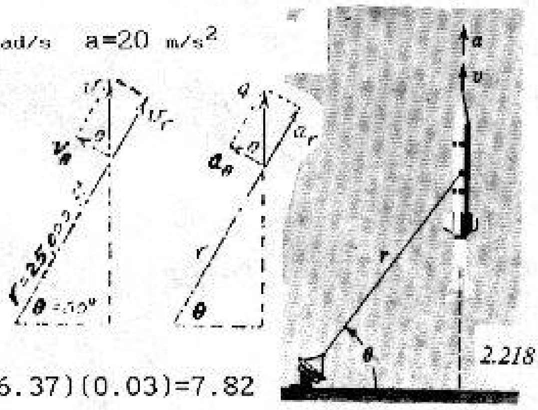
$r=700\ m \quad \theta=60^\circ \quad \dot{\theta}=0.03\ rad/s \quad a=20\ m/s^2$

$v_\theta=r\dot{\theta}=700(0.03)=21\ m/s$

$v=21/\cos60^\circ=42\ m/s$

$v_r=\dot{r}=42\cos30^\circ=36.37\ m/s$

$a_\theta=a\cos60^\circ=20(0.5)$
$=10\ m/s^2$



نگاره 2.218

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow r\ddot{\theta}=10-2(36.37)(0.03)=7.82$

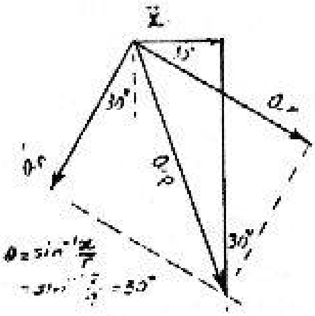
www.collegeprozheh.ir

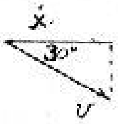
$\ddot{\theta}=7.82/700=0.0111$ rad/s^2

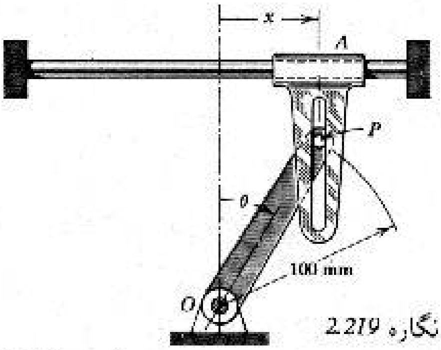
$a_r=a\sin 60^\circ=20(\sqrt{3}/2)=17.32$ m/s^2 $\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow \ddot{r}=17.32+700(0.03)^2=17.95$ m/s^2

2.219 - اگر در $x=50$ mm و $\dot{x}=1.2$ m/s و $\ddot{x}=9$ m/s^2 باشد، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟







نگاره 2.219

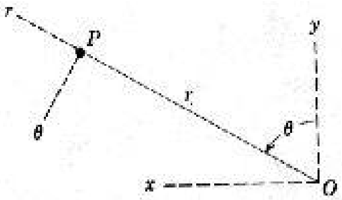
$v=1.2/(\sqrt{3}/2)=1.04$ m/s $\quad a_n=v^2/\rho=10.8$ m/s^2

$a_t=124/\sqrt{3}=71.6$ ft/s^2 $\quad v=r\dot{\theta}$

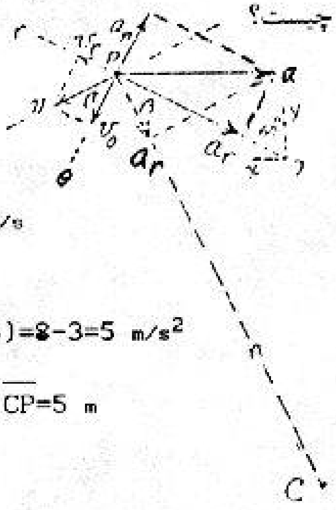
$\dot{\theta}=v/r=13.86$ rad/s $\quad a_t=r\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}=a_t/r=71.6/(4/12)=215$ rad/s^2

2.220 - با $r=2$ m و $\theta=160^\circ$ و $v_r=3$ m/s و $v_\theta=4$ m/s و $a_r=-10$ m/s^2 و $a_\theta=-5$ m/s^2، اندازه ρ چیست؟



نگاره 2.220



$v_r=3$ m/s $\quad v_\theta=4$ m/s $\quad \tan\beta=3/4 \quad v=5$ m/s

$a_r=-10$ m/s^2 $\quad a_\theta=-5$ m/s^2

$a_n=|a_r|\cos\beta-|a_\theta|\sin\beta=10(4/5)-5(3/5)=8-3=5$ m/s^2

$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=5^2/5=5$ m $\quad \overline{OP}=2$ m $\quad \overline{CP}=5$ m

$C(-0.23$ m $,-3.60$ m$)$

2.221 - با $v=5$ m/s و $a_x=15$ m/s^2 و $a_\theta=-15$ m/s^2، اندازه a_r و a_y و a_t و a_n و ρ چیست؟

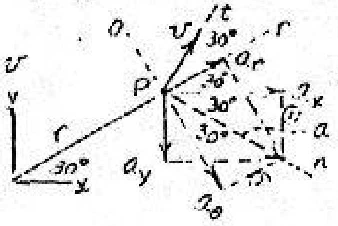
www.collegeprozheh.ir

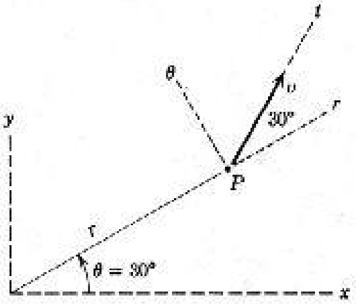
$a_n=a=15/\cos30^\circ=10\sqrt{3}\ \mathrm{m/s^2}$

$a_y=-15\tan30^\circ=-5\sqrt{3}\ \mathrm{m/s^2}$

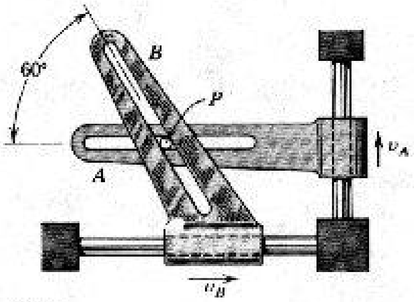
$a_r=10\sqrt{3}\sin30^\circ=5\sqrt{3}\ \mathrm{m/s^2}$

$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=5^2/10\sqrt{3}=1.44\ \mathrm{m}$



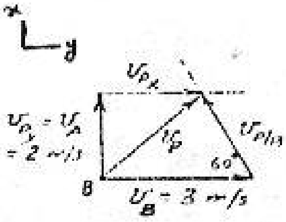


نگاره 2.221



نگاره 2.222

2.222 - با $v_A=2\ m/s$ و $v_B=3\ m/s$، اندازه v_P چیست؟



$\underline{v}_P=\underline{v}_B+\underline{v}_{P/B} \quad \underline{v}_P=\underline{v}_{Px}+\underline{v}_{Py}=\underline{v}_{px}+\underline{v}_A \quad \underline{v}_{Px}+\underline{v}_A=\underline{v}_B+\underline{v}_{P/B}$

$v_P=\sqrt{2^2+(3-2/\sqrt{3})^2}=\underline{2.72\ \mathrm{m/s}} \quad v_{Py}=v_A=2\ \mathrm{m/s}$

$v_B=3\ \mathrm{m/s}$

2.223 - با $\theta=\frac{\pi}{4}+0.12Sin4\pi t$ و $\dot\theta=1.5\ rad/s$ و $\dot L=0.9\ m/s$، شتاب نوک میله، در $\theta=\pi/4$ و $L=1.2\ m$ و $\beta=60^\circ$ چیست؟

$\dot\phi=-\dot\beta \quad R=L \quad \dot\theta=4\pi(0.12)\cos4\pi t=0.48\pi\ \mathrm{rad/s}$

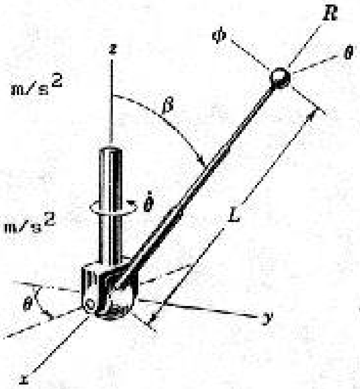
$\ddot\theta=-1.92\pi^2\sin4\pi t=0$

$a_R=0-1.2(-3/2)^2-1.2(0.48\pi)^2(\sqrt{3}/2)^2=-4.75\ \mathrm{m/s^2}$

$a_\theta=\cos\phi(2\dot R\dot\theta+R\ddot\theta)-2R\dot\theta\dot\phi\sin\phi=5.07\ \mathrm{m/s^2}$

$a_\phi=2\dot R\dot\phi+R\ddot\phi+R\dot\theta^2\sin\phi\cos\phi \quad \ddot\phi=0 \quad a_\phi=-1.518\ \mathrm{m/s^2}$

$a=\sqrt{(-4.75)^2+(5.07)^2+(-1.518)^2}=\underline{7.11\ \mathrm{m/s^2}}$



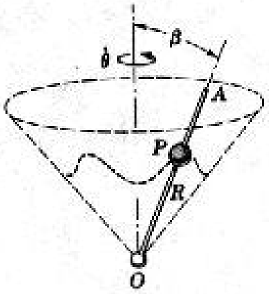
نگاره 2.223

2.224 - با $\beta=30^\circ$ و $\dot\theta=120\ rev/min$ و $R=400+100Sin2\pi nt$ و $n=2\ rev/s$ شتاب ماسوره P در بیشینه R چیست؟

$R=400+100\sin2\pi t \quad \dot R=200\pi\cos2\pi t \quad \ddot R=-400\pi^2\sin2\pi t$

$\dot\theta=120\ \mathrm{rad/s} \quad \ddot\theta=0 \quad \phi=\pi/2-\beta=60^\circ \quad \dot\phi=\ddot\theta=0$

www.collegeprozheh.ir



نگاره 2.224

$\dot{R}$ Max: $\cos 2\pi t=1$ & $\sin 2\pi t=0$

$\Rightarrow a_R=\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$

$=0-400(0)-400(2\pi/3)^2(1/2)^2=-438.65$ mm/s²

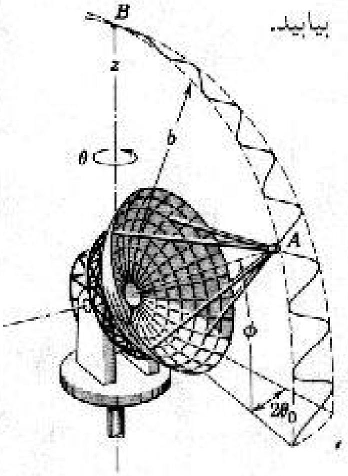
$a_\theta=(\cos\phi/R)d(R^2\dot{\theta})/dt-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$

$=2\dot{R}\dot{\theta}\cos\phi-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi=438.65$ mm/s²

$a_\phi=(1/R)d(R^2\dot{\phi})/dt+R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi=759.76$ mm/s²

$a=438.65\sqrt{(-1)^2+1^2+(\sqrt{3})^2}=438.65\sqrt{5}=980.85$ mm/s²

2.225 - با $\theta=\theta_0 Cos\omega t$ و $\dot{\phi}=k$، شتاب نوک آنتن را، (a) به هنگام گذر از A و (b) به هنگام گذر از B ، بیابید.



نگاره 2.225

$\theta=\theta_0\cos\omega t \quad \dot{\theta}=-\theta_0\omega\sin\omega t \quad \ddot{\theta}=-\theta_0\omega^2\cos\omega t$

$\dot{\phi}=K \quad \ddot{\phi}=0 \quad R=b \quad \dot{R}=\ddot{R}=0$

$a_R=0-bK^2-b\theta_0^2\omega^2\sin^2\omega t\cos^2\phi$

$a_\theta=b\cos\phi(-\theta_0\omega^2\cos\omega t)-2b(-\theta_0\omega\sin\omega t)K\sin\phi$

$a_\phi=0+b(\theta_0\omega\sin\omega t)^2\sin\phi\cos\phi$

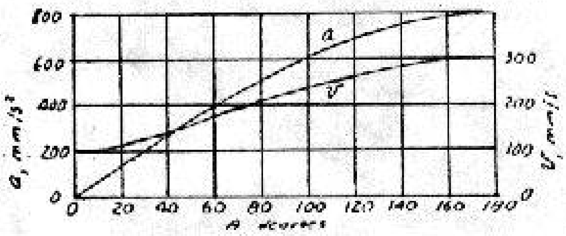
At A: $\cos\omega t=-1 \quad \sin\omega t=0 \quad a_R=-bk^2$

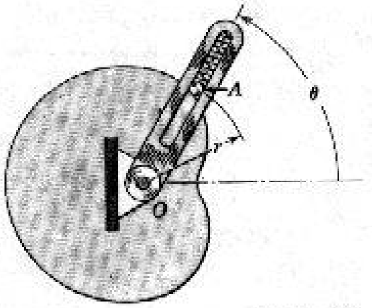
$a_\theta=b\omega^2\theta_0\cos\phi \quad a_\phi=0 \quad \Rightarrow a=b\sqrt{K^4+\omega^4\theta_0^2\cos^2\phi}$

At B: $\cos\omega t=0 \quad \sin\omega t=1 \quad \phi=\pi/2$

$\Rightarrow a=bK\sqrt{K^2+4\omega^2\theta_0^2}$

2.226 - بازو با $\dot{\theta}=2$ rad/s می‌چرخد و میخ A را بر بادامک $r=b-cCos\theta$ $(b>c)$ و $b=100$ mm و $c=50$ mm می‌ماند. اندازه تندی و شتاب A را از $\theta=0$ تا $\theta=180°$ بکشید.





نگاره 2.226

$r=100-50\cos\theta \quad \dot{\theta}=2$ rad/s $\quad \ddot{\theta}=0$

$\dot{r}=50\dot{\theta}\sin\theta=100\sin\theta \quad \ddot{r}=100\dot{\theta}\cos\theta=200\cos\theta$

www.collegeprozheh.ir

$v_r=\dot{r}=100\sin\theta \quad v_\theta=r\dot{\theta}=(100-50\cos\theta)^2=200-100\cos\theta$

$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=100\sqrt{5-4\cos\theta}$

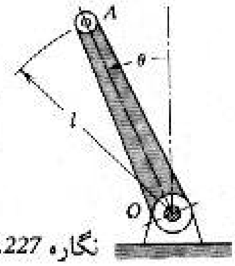
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=200\cos\theta-4(100-50\cos\theta)=400(\cos\theta-1)$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2(100\sin\theta)2=400\sin\theta$

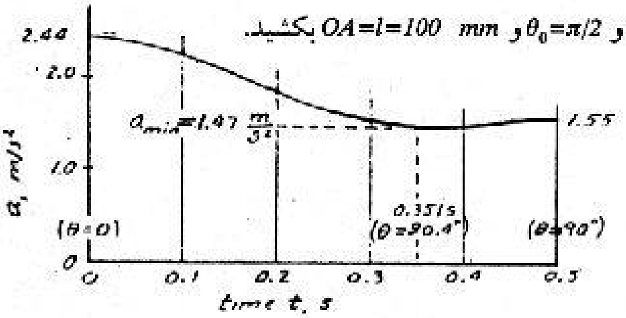
$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=400\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}$

At $\theta=0 \quad a=a_r=0 \quad (\ddot{r}, r\dot{\theta}^2=0$ for $b=2c)$

2.227 - بازوی OA با دستور $\theta=\theta_0 Sin(2\pi t/\tau)$ تاب می‌خورد. شتاب A را برای $t=0$ تا $t=0.5$ s ب
$\tau=2$ s و $\theta_0=\pi/2$ و $OA=l=100$ mm بکشید.



نگاره 2.227



$\theta=\theta_0\sin(2\pi t/T)=(\pi/2)\sin\pi t \quad \dot{\theta}=(\pi^2/2)\cos\pi t$

$\ddot{\theta}=(-\pi^2/2)\sin\pi t \quad a_n=l\dot{\theta}^2=l(\pi^2/4)\cos^2\pi t$

$a_t=l\ddot{\theta}=-l(\pi^3/2)\sin\pi t$

$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=(l\pi^3/2)\sqrt{(\pi^2/4)\cos^4\pi t+\sin^2\pi t}$

$0<t<0.5$ s , $da^2/dt=0 \quad \cos\pi t=\sqrt{2}/\pi$
$\pi t=1.104$ rad $\quad t=0.351$ s

$a_{min}=1.470$ m/s² at $\theta=80.4°$

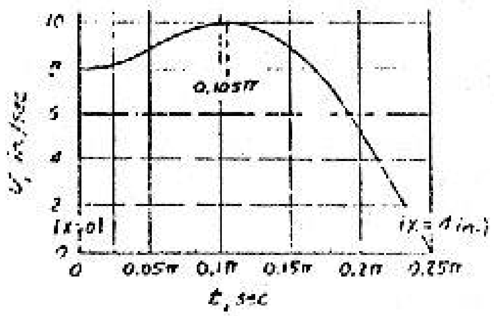
2.228 - اگر شیار قائم، با دستور $x=100Sin2t$ mm پس و پیش رود، اندازه تندی P در شیا
$y=\frac{x^2}{100}$ mm، در $x=100$ mm چگونه است؟

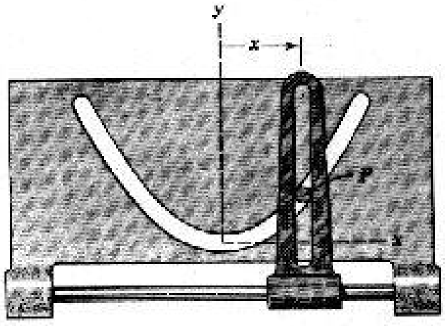
$y=x^2/100 \quad x=100\sin 2t$

$\dot{y}=x\dot{x}/50=100\sin 2t(200\cos 2t)/50=400\sin 2t\cos 2t$

$\dot{x}=200\cos 2t \quad v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=40000\cos^2 2t(1+4\sin^2 2t)$

$v=200\cos 2t\sqrt{1+4\sin^2 2t} \quad dv/dt=0 \Rightarrow 1-2\sin^2 2t=1/4$





نگاره 2.228

$\sin 2t=\sqrt{3/8}$ $\cos 2t=\sqrt{5/8}$ $\underline{v=250\ \text{mm/s}}$

$2t=37.76$ $t=\underline{18.88\ \text{s}}$

$\underline{x=61.2\ \text{mm}}$

2.229 - یک کشتی به جرم 16000 ton با نیروی $T=250$ kN در آب با نیروی اصطکاک $R=4.5v^2$ kN به راه می‌افتد و به اندازه $a=\frac{(T-R)}{m}$ شتاب می‌گیرد. نمودار v-s را برای 5 مایل نخست بکشید. تندی کشتی پس از 1 مایل چیست؟ بیشینه تندی کشتی چیست؟

$$v\,dv=a\,ds \quad a=(T-4.50v^2)/m \quad \int_0^v m v\,dv/(T-4.50v^2)=\int_0^s ds$$

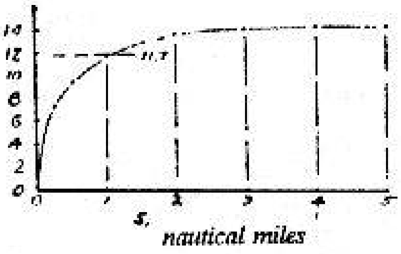
$$s=(m/900)\ln(T/(T-4.5v^2)) \quad e^{900s/m}=T/(T-4.50v^2)$$

$$v=\sqrt{T(1-e^{-900s/m})/4.50} \quad T=250\ \text{kn} \quad m=16000\ \text{tons}$$

$$v=(3.6/1.852)\sqrt{250(1-e^{-900s/8525/16000})/4.50}$$

$$=14.49\sqrt{1-e^{-1.042}}$$

$\underline{v_{1min}=11.7\ \text{knots}}$ $\underline{v_{max}=14.49\ \text{knots}}$



www.collegeprozheh.ir

فرگرد سه

سینتیک ذره
Kinetics of Particles

3.1 - یک هواپیمای چهارموتوره 300 Mg که هر کدام نیروی 180 kN می‌سازد، با تندی 220 km/h از زمین برمی‌خیزد. طول باند پرواز چیست؟

$a=4T/m=4(180{,}000)/300{,}000=2.4\ m/s^2$

$v=(220\ km/h)(1\ h/3600\ s)(1000\ m/km)=61.1\ m/s$

$v^2-v_o^2=2a(s-s_o)\quad (61.1)^2=2(2.4)s\quad \underline{s=778\ m}$

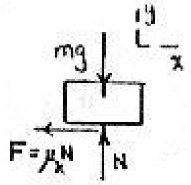
3.2 - بسته نشان داده، کجا و کی می‌ایستد؟

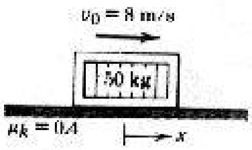
$\sum F_y=0\quad N-mg=0\quad N=mg\quad \sum F_x=ma_{GX}$

$-\mu_k mg=ma_{GX}=-(0.4)(9.81)=-3.92\ m/s$

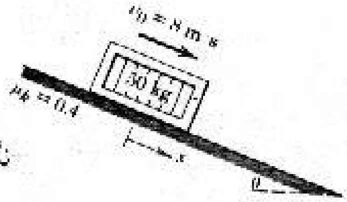
$v^2-v_o^2=2a(x-x_o)\quad 0-8^2=2(-3.92)(x-0)$

$\underline{x=8.15\ m}\quad v=v_o+at\quad 0=8-3.92t\ ,\ \underline{t=2.04\ s}$



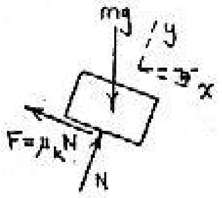


نگاره 3.2



نگاره 3.3

3.3 - بسته نشان داده، کجا و کی می‌ایستد؟



$\sum F_y=0\quad N-mg\cos\theta=0\quad N=mg\cos\theta$

$\sum F_x=ma_x\quad mg\sin\theta-\mu_k mg\cos\theta=ma_{GX}$

$a_{GX}=g(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)$

www.collegeprozheh.ir

a) $\theta=15^\circ$ $a_{GX}=9.81(\sin15^\circ-0.4\cos15^\circ)=-1.25\ m/s^2$

$v^2-v_o^2=2a(x-x_o)$ $0-8^2=2(-1.25)(x-0)$, $\underline{x=25.6\ m}$

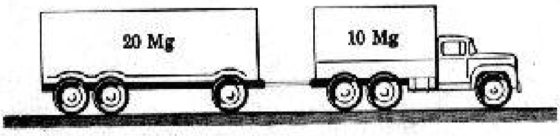
$v=v_o+at$ $0=8-1.25t$, $\underline{t=6.39\ s}$

b) $\theta=30^\circ$: $a_{GX}=9.81(\sin30^\circ-0.4\cos30^\circ)=1.51\ m/s^2$

3.4 - اگر خودرو با نیروی *20 kN* به راه افتد، کشش بین دو بخش، و شتاب آنها چیست؟

$\sum F=ma$ $20,000=30,000a$ $a=0.67\ m/s^2$

$\sum F=ma$ $T=2,000(0.67)=13,300\ N$ $\underline{T=13.3\ KN}$



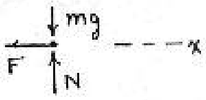
نگاره *3.4*

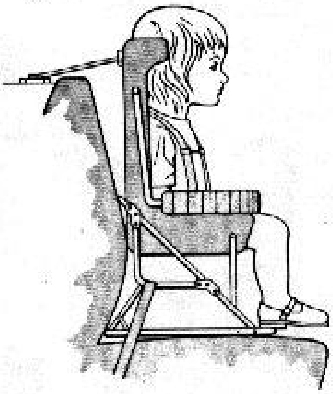
3.5 - کودک، *12 kg* جرم دارد و خودرو با تندی *50 km/h* به دیوار می‌خورد و پس از *0.2 s* می‌ایستد. نیروی *F* در تسمه‌های نگهدارنده صندلی کودک چیست؟

$50\ km/hr=13.89\ m/s$ $v=v_o+at$ $0=13.89+a(0.2)$

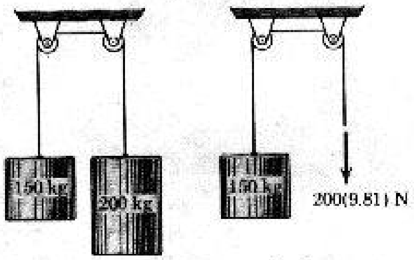
$a=-69.45\ m/s^2$

$\sum F_x=ma_x$ $-F=12(-69.45)$ $\underline{F=833.4\ N}$





نگاره *3.5*



(الف) (ب) نگاره *3.7*

3.6 - پرسش پیش را با این گمان که تندی خودرو در برخورد، از دستور $v=v_0(b-e^{ct})$ پیروی می‌کند دوباره پاسخ دهید.

$v=v_o(b-e^{ct})$ $t=0$ $v_o=v_o(b-1)$ $b=z$

$t=0.2s$ $0=v_o(z-e^{c(0.2)})$ $z=e^{0.2c}$

$\ln z=0.2c$ $c=3.466\ s^{-1}$ $\Rightarrow$ $v=13.89(z-e^{3.466t})$

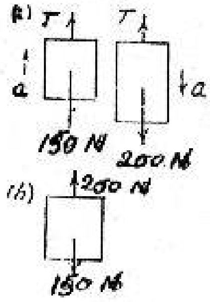
$a=dv/dt=13.89(3.466)e^{3.466t}=48.14e^{3.466t}$

$a_{max}=a(t=0.2)=96.29\ m/s^2$

www.collegeprozheh.ir

$F_{max}=ma_{max}=12(96.29)=1155.5$ N

3.7 - شتاب استوانه 150 kg چیست؟



$\sum F=ma; T-150(9.81)=150a$

$200(9.81)-T=200a \quad 50(9.81)=350a,$

$a=1.402$ m/s²

$(200-150)9.81=150a, a=3.27$ m/s²

3.8 - ذره‌ای به جرم 3 kg با تندی 4 m/s در سوی y با نیروی $F_y=5+2t^2$، پس از $t=3$ s به چه تندی می‌رسد؟

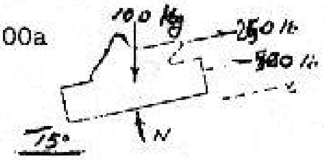
$\sum F_y=ma_y: 5+2t^2=3a \quad a=dv/dt \quad \int_0^3 (5+2t^2)dt=3\int_4^v dv$

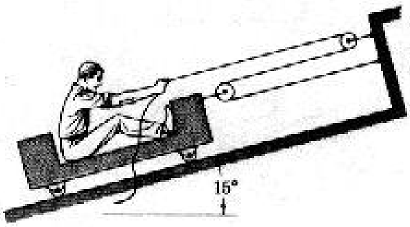
$5(3)+(2/3)3^2=3(v-4) \quad v=15$ m/s

3.9 - اگر جرم مرد و گاری، 100 kg باشد و مرد، ریسمان را با نیروی 250 N بکشد، شتابش چیست؟

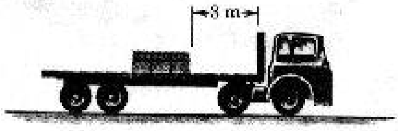
$\sum F_x=ma_x \quad 500+250-100(9.81)\sin 15°=100a$

$a=496/100=4.96$ m/s²





نگاره 3.9



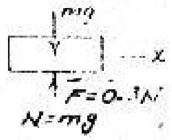
نگاره 3.10

3.10 - ضریب اصطکاک بین بسته و کف کامیون، 0.3 است. کمترین فاصله‌ای که کامیون با تندی 70 km/h می‌تواند در آن بایستد چیست؟

$\sum F_x=ma_x \quad -0.3mg=ma_x$

$a_x=-0.3g=-0.3(9.81)=-2.94$ m/s²

$\int_v^0 vdv=\int_0^s a_x dx \quad -v^2/2=a_x s$



$s=-(70/3.6)^2/[-2(2.94)]=64.3$ m

www.collegeprozheh.ir

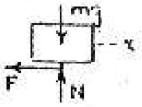
3.11 - اگر کامیون پرسش پیش، با تندی 70 km/h، پس از 50 m بایستد، آیا بسته به دیوار پشتی می‌خورد؟ اگر چنین شود، تندی برخورد چیست؟ از ضریب اصطکاک جنبشی و ایستایی 0.25 و 0.3 بهره گیرید.

$v^2-v_o^2=2a_T(x-x_o) \quad 0^2-(19.44)^2=2a_T(50-0)$

$a_T=-3.78\ m/s^2 \quad \sum F_x=ma_x: -F=m(-3.78)$

$F=3.78\ m \quad F_{max}=\mu_s N=0.3(9.81m)=2.94\ m$

$F>F_{max}, F=\mu_k N \quad \sum F_x=ma_x: -0.25mg=ma_c$



$a_c=-2.45\ m/s^2$

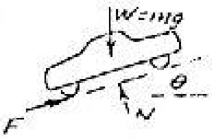
$a_{c/T}=a_c-a_T=-2.45-(-3.78)=1.328\ m/s^2$

$v_{c/T}^2-v_{c/T_o}^2=2a_{c/T}(x_{c/T}-x_{c/T_o})$

$v_{c/T}^2-0^2=2(1.328)(3-0), \underline{v_{c/T}=2.82\ m/s}$

stopping time=5.14 s impacts at 2.13 s

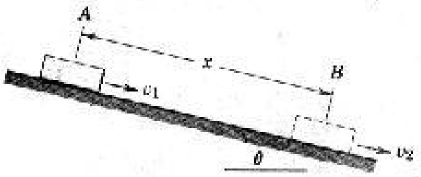
3.12 - شتاب خودرو پس از A چیست؟



For $\theta=\theta_1 \quad a=0 \quad \sum F=0; F=W\sin\theta_1 \quad \theta=\theta_2 \Rightarrow \sum F=ma$

$\Rightarrow mg\sin\theta_1-mg\sin\theta_2=ma \quad \underline{a=g(\sin\theta_1-\sin\theta_2)}$

نگاره 3.12

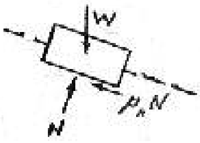


نگاره 3.13

3.13 - با $v_1=20\ m/s$ و $v_2=10\ m/s$ و $x=75\ m$ و $\theta=15^\circ$، ضریب اصطکاک جنبشی چیست؟

$\sum F_x=ma_x; W\sin 15^\circ-\mu_k(W\cos 15^\circ)=(W/g)a_x$

$\int_{20}^{10} v\,dv=\int_0^{75} a_x\,dx, a_x=\frac{100-400}{2(75)}=-2\ m/s^2$

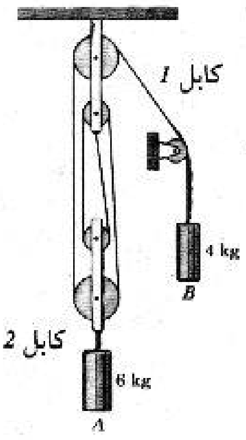


$\Rightarrow g(\sin 15^\circ-\mu_k\cos 15^\circ)=a_x=-2$

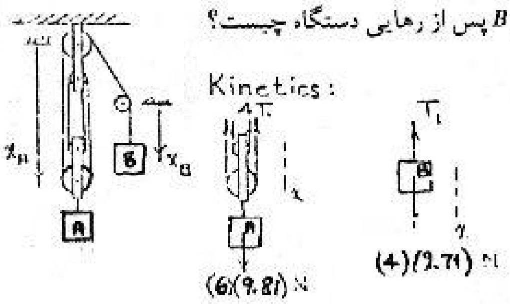
$\mu_k=\tan 15^\circ+2/(9.81\times 0.9650)=\underline{0.479}$

www.collegeprozheh.ir

3.14 - شتاب A و B پس از رهایی دستگاه چیست؟



نگاره 3.14



$4x_A+x_B=L_{rope}+cte \quad 4a_A+a_B=0 \quad (1)$

$\sum F_x=ma_x: 6(9.81)-4T_1=6a_A \quad (2)$

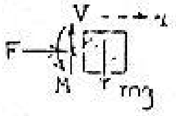
$\sum F_x=ma_x: 4(9.81)-T_1=4a_B \quad (3)$

$(1)-(3) \Rightarrow a_A=-1.401\ m/s^2 \quad a_B=5.61\ m/s^2$

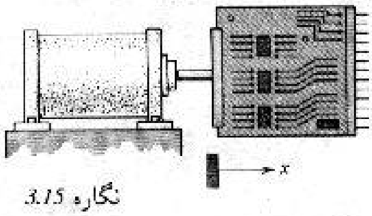
$T_1=16.82\ N \quad T_2=4T_1=67.3\ N$

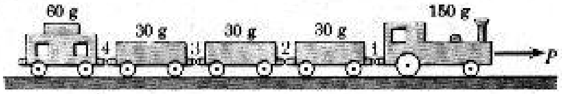
3.15 - لرزاننده، بسته‌ای به جرم m را با $x=XSin\omega t$ می‌لرزاند. نیروی بیشینه چیست؟

$x=X\sin\omega t \quad \dot{x}=X\omega\cos\omega t \quad \ddot{x}=-X\omega^2\sin\omega t \quad \ddot{x}_{max}=X\omega^2$



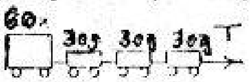
$\sum F_x=ma_x: F=m(-X\omega^2\sin\omega t) \quad F_{max}=mX\omega^2$


نگاره 3.15



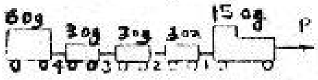
نگاره 3.16

3.16 نیروی بیشینه آهنرباهای چسباننده واگنهای بازی، $0.9\ N$ است. بیشینه P چیست؟ اگر P بزرگتر شود کدام واگن جدا می‌شود؟



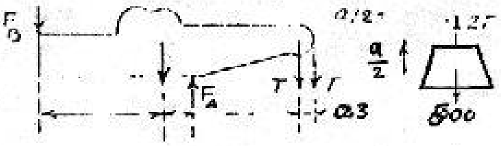
- پیوند d پیش از همه می‌گسلد

$\sum F_x=ma_x \quad T=0.9=(150/1000)a \quad a=6\ m/s^2$



$\sum F_x=ma_x \quad P=(300/1000)(6) \quad P=1.8\ N$

3.17 - جرم تیر نشان‌داده، با گرانیگاه G، $1200\ kg$ است. اگر شتاب p، $6\ m/s^2$ باشد، واکنش در A چیست؟



www.collegeprozheh.ir

$\sum F=ma$

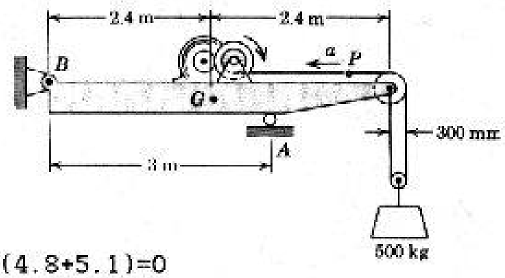
$2T-500(9.81)=500(6/2)$

$T=3202.5\ N$

$\sum M_B=0$

$1200(9.81)(2.4)-3F_A+322.5(4.8+5.1)=0$

$F_A=19.99\ N$



نگاره 3.17

3.18 -اگر ضریب اصطکاک بین بسته‌ها، 0.5 باشد، شتاب آنها با (a) $P=60\ N$ و (b) $P=40\ N$ چیست؟

(a) $2P=120\ N \quad F_{max}=0.5(196.2)-98.1\ N<2P$

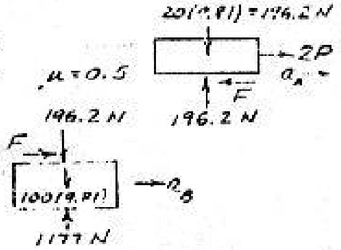
slipping $\Rightarrow F=98.1\ N$

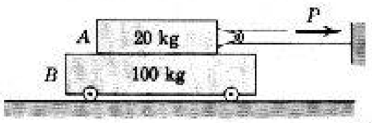
A; $\sum F=ma;\ 120-98.1=20a_A \quad a_A=1.10\ m/s^2$

B; $\sum F=ma;\ 98.1=100a_B \quad a_B=0.98\ m/s^2$

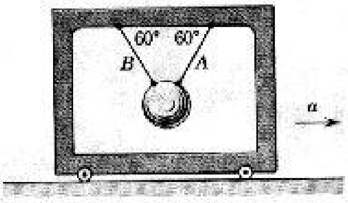
(b) $2P=80\ N<F_{max}$ no slipping

$\sum F=ma;\ 80=120a \quad a_A=a_B=a=0.67\ m/s^2$



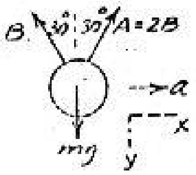


نگاره 3.18



نگاره 3.19

3.19 - شتاب a چه باشد تا کشش در A دو برابر B گردد؟

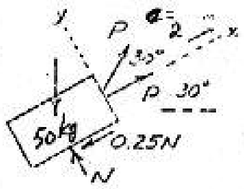


$\sum F_x=ma_x \quad 2B\sin 30-B\sin 30=ma$

$\sum F_x=0 \quad 2B\cos 30+B\cos 30-mg=0$

$\Rightarrow \quad a=9/3\sqrt{3}$

3.20 - کشش P چه باشد تا شتاب بسته، $2\ m/s^2$ گردد؟



$\sum F_x=ma_x$

$P(1+\cos 30^\circ)-0.25N-50(9.81)\sin 30^\circ=50(2)$

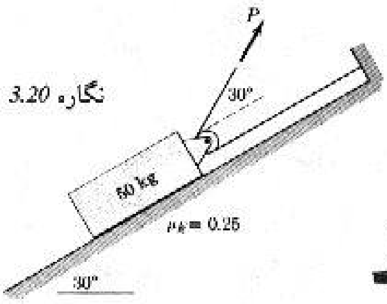
$\sum F_y=0; \quad N+P\sin 30^\circ-50(9.81)\cos 30^\circ=0$

$1.866P-0.25N=345.25 \quad 0.5P+N=424.8$

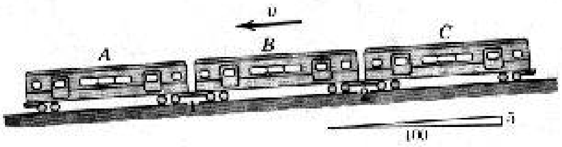
$\Rightarrow \quad P=226.74\ N$

www.collegeprozheh.ir

نگاره 3.20



نگاره 3.21



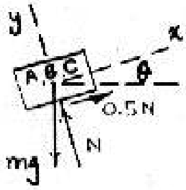
3.21 - جرم هر واگن، $2500 \ kg$ است و همگی با هم ترمز می‌گیرد. اگر نیروی ترمز، نیم برابر نیروی واکنش زمین باشد، شتاب قطار و کشش بستهای 1 و 2 را برای هنگامی‌که (a) همه ترمزها درست است و (b) ترمز A از کار می‌افتد و (c) ترمز B از کار می‌افتد و (d) ترمز C از کار می‌افتد، بیابید.

$\theta=\tan^{-1}(5/100)=2.86^{\circ}$

$\sum F_y=0 \quad N=mg\cos\theta$

$\sum F_x=ma_x \quad 0.5mg\cos\theta-mg\sin\theta=ma$

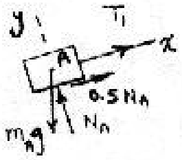
$a=g(0.5\cos\theta-\sin\theta)=\underline{4.41 \ m/s^2}$



$\sum F_y=0 \quad N_A=m_A g\cos\theta$

$\sum F_x=ma_x \quad T_1+0.5m_A g\cos\theta-m_A g\sin\theta=m_A(4.41)$

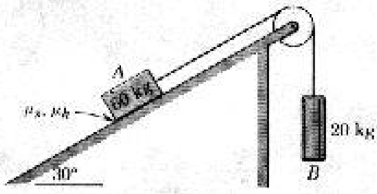
$\underline{T_1=0} \quad \underline{T_2=0}$

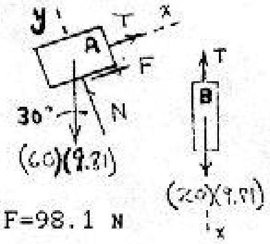


By	similar(b)	angles(c)	d
a	2.78 m/s^2	2.78	2.78 m/s^2
T_1	8160 N(T)	4080 N(C)	4080 N(C)
T_2	4080 N(T)	4080 N(T)	8160 N(C)

3.22 - شتاب A و B و کشش ریسمان را پس از رهایی، برای (a) $\mu_s=0.25$ و $\mu_k=0.2$ (b) $\mu_s=0.15$ و $\mu_k=0.1$ بیابید.

نگاره 3.22





$T=196.2 \ N$

$\sum F_x=0 \quad 196.2+F-(60)(9.81)\sin30^{\circ}=0 \quad F=98.1 \ N$

$F_{max}=\mu_s N=0.25(60)(9.81)\cos30^{\circ}=127.4 \ N$

www.collegeprozheh.ir

no motion $\Rightarrow$ $a=0$ $T=196.2$ N

$F_{max}=0.15(60)(9.81)\cos30^\circ=76.5$ N   motion

$A: \sum F_x=ma_x$

$T-60(9.81)\sin30^\circ+0.1(60)(9.81)\cos30^\circ=60a$

$B: \sum F_y=ma_y$ $20(9.81)-T=20a$

$\Rightarrow$ $a=-0.589$ m/s^2 $\underline{T=208 \text{ N}}$

3.23 - با $\mu_s=0.25$ و $\mu_k=0.2$، شتاب A و B و کشش ریسمان، پس از رهایی چیست؟

B: $2T=196.2$ $T=98.1$ N

A: $\sum F_x=0$ $98.1-588.6\sin30^\circ+F=0$ $F=196.2$ N

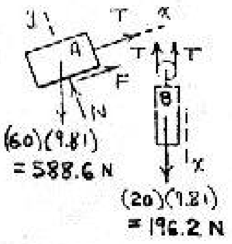
$F_{max}=\mu_s N=0.25(588.6)\cos30^\circ=127.4$ N

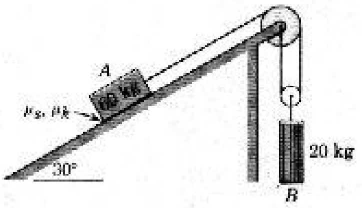
$F>F_{max}$ $\Rightarrow$ motion $a_A=2a_B=2a$ A: $\sum F_x=ma_x$

$T+0.2(588.6\cos30^\circ)-588.6\sin30^\circ=60(2a)$

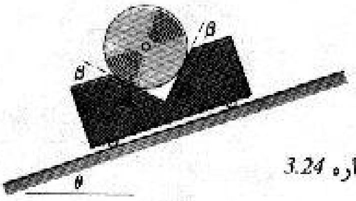
$B: \sum F_x=ma_x: -2T+196.2=20a$

$\underline{a=-0.725 \text{ m/s}^2}$ $\underline{T=105.4 \text{ N}}$



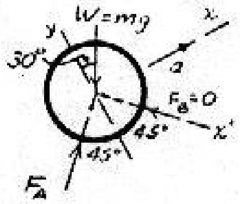


نگاره 3.23



نگاره 3.24

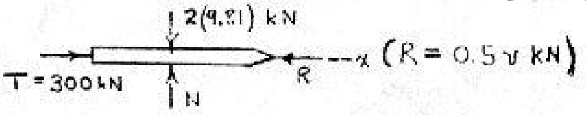
3.24 شتاب بیشینه ارابه رو به بالا چه باشد که استوانه به جرم m، با $\beta=45^\circ$ و $\theta=30^\circ$ نیفتد؟



$\sum F_x=ma_x; mg\cos(30^\circ+45^\circ)=ma\cos45^\circ$

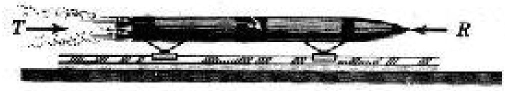
$a=(\cos75^\circ/\cos45^\circ)g=9.81(0.2588/0.707)=\underline{0.366g}$

3.25 - نیروی مقاوم R را با خط‌چین جانشین کنید و بگویید با $T=300$ kN و $m=2$ Mg، موشک کی به 300 m/s می‌رسد؟

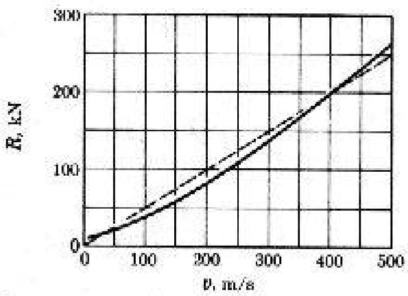


$\sum F_x=ma_x$ $300-0.5v=2a$ $(300-0.5v)dx=2vdv$

www.collegeprozheh.ir



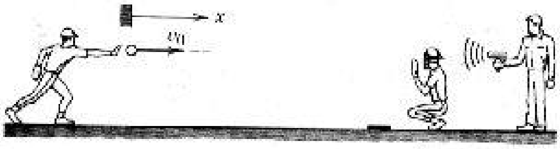
نگاره 3.25



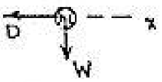
$$\int_0^x dx = 2\int_0^v \frac{v\,dv}{300-0.5v}$$

$$x = 2/(0.5)^2[300-0.5v-300\ln 9300-0.5v)]_0^{400} \qquad \underline{x=1037 \text{ m}}$$

3.26 - بازیکن، توپی به جرم 0.146 kg و محیط 230 mm را با $v_0=140$ km/h پرتاب می‌کند. اگر نیروی ترا از دستور $D=0.4(\rho v^2/2)S$ به دست آید، وابستگی v-x در بازه $x=18$ m چیست؟



نگاره 3.26



$P=\pi D=0.23$ m $\quad D=0.073$ m $\quad s=\pi D^2/4=0.0042$ m^2

Drag $\quad D=C_D(\rho v^2/2)s=(C_D\rho s/2)v^2=$

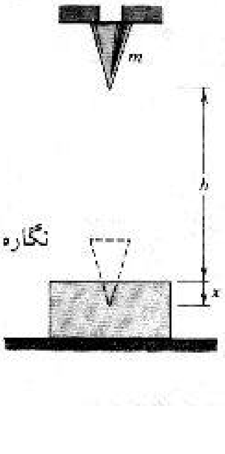
$=(1/2)(0.4)(1.2062)(0.0042)v^2 = 0.001v^2 = kv^2$

$\sum F_x = ma_x \quad -kv^2 = mv\,dv/dx \quad -k/m\int_0^x dx = \int_{v_0}^{v} dv/v$

$\Rightarrow\ \underline{v = v_0 e^{-(k/m)x} = v_0 e^{-0.007x}}$

$v_0 = 140$ km/hr $= 38.89$ m/s , $x=18$ m

$\underline{v_{18} = 38.89e^{-0.007x} = 34.31 \text{ m/s} = 123.5 \text{ km/hr}}$

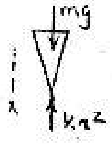


نگاره 3.27

3.27 - سوزن m از بلندی h می‌افتد و با اصطکاک $R=-kx^2$ در $x=d$ می‌ایستد. k چیست؟

$\sum F_x = ma_x \quad mg-kx^2 = mv(dv/dx)$

$$\int_0^d (g-kx^2/m)dx = \int_{v_0}^{0} v\,dv$$



$gd-(k/3m)d^3 = -v_0^2/2$

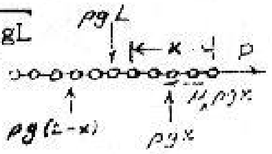
$v_0=\sqrt{2gh} \quad \underline{k=(3mg/d^3)(h+d)}$

www.collegeprozheh.ir

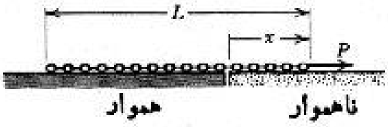
3.28 - زنجیر از $x=0$ با نیروی P به راه می‌افتد و بر سطح ناهموار با ضریب اصطکاک μ_k کشیده می‌شود. تندی زنجیر در $x=L$ چیست؟ کمترین P چیست؟

$\sum F_x=ma_x \quad P-\mu_k\rho gx=\rho La_x \quad \int_0^v vdv=\int_0^L a_x dx$

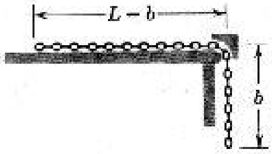
$v^2/2=\int_0^L (P/\rho L-\mu_k gx/L)=P/\rho-\mu_k gL/2 \quad v=\sqrt{2P/\rho-\mu_k gL}$



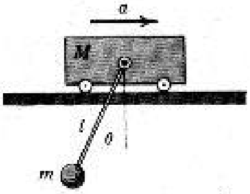
$P>\mu_k\rho gx \Rightarrow \underline{P_{min}=\mu_k\rho gL}$



نگاره 3.28



نگاره 3.29

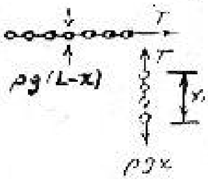


نگاره 3.30

3.29 - زنجیر از آرایش نشان داده، با یک تکان به راه می‌افتد. تندی آن به هنگام افتادن آخرین ذره چیست؟

$\sum F_x=ma_x$

$(L-x)\text{part: } T=\rho(L-x)a_x \quad (x)\text{part: } \rho gx-T=\rho xa_x$



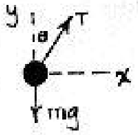
$\Rightarrow a_x=gx/L \quad \int_0^v vdv=\int_0^L a_x dx$

$v^2/2=gx^2/2L]_b^L=(g/2L)(L^2-b^2) \quad v=\sqrt{gL(1-b^2/L^2)}$

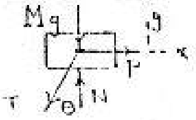
3.30 - اگر M با شتاب a پیش رود، زاویه θ و نیروی شتاب دهنده چیست؟

$\sum F_y=0 \quad T\cos\theta-mg=0 \quad T=mg/\cos\theta$

$\sum F_x=ma_x \quad T\sin\theta=m_x \quad (mg/\cos\theta)\sin\theta=ma$

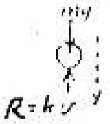


$\underline{\theta=\tan^{-1}(a/g)}$



$\sum F_x=ma_x \quad P-T\sin\theta=Ma \quad P=ma+Ma=\underline{(m+M)a}$

3.31 - گلوله‌ای در آب با نیروی برای $R=kv$ می‌افتد. وابستگی ژرفای h و تندی v چیست؟



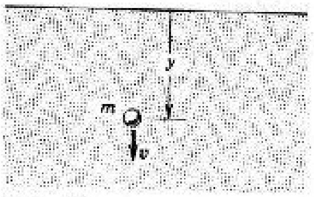
$\sum F_y=ma_y \quad mg-kv=ma \quad a=g-kv/m \quad vdv=ady$

www.collegeprozheh.ir

$$\int_0^v \frac{vdv}{g-kv/m}=\int_0^h dy$$

$$h=(m/k)^2(-kv/m-g\ln(1-kv/mg))$$

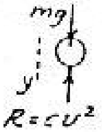
$$h=(m/k)^2 g\ln[1/(1-kv/mg)]-mv/k$$



نگاره 3.31

3.32 - در پرسش پیش اگر $R=cv^2$ باشد، وابستگی h و v چیست؟

$$\sum F_y=ma_y \quad mg-cv^2=ma \quad a=g-cv^2/m$$



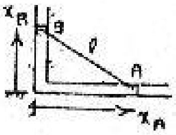
$$vdv=ady \quad \int_0^v vdv/(g-cv^2/m)=\int_0^h dy$$

$$h=-(m/2c)\ln(g-cv^2/m)]_0^v \quad h=(m/2c)\ln(\frac{mg}{mg-cv^2})$$

3.33 در $x_A=0.4 \; m$ تندی A ، $0.9 \; m/s$ است. شتاب هر لغزنده و نیرو در میله چیست؟

$$x_A^2+x_B^2=l^2 \quad x_A\dot{x}_A+x_B\dot{x}_B=0 \quad x_A\ddot{x}_A+\dot{x}_A^2+x_B\ddot{x}_B+\dot{x}_B^2=0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_B=-x_A\dot{x}_A/x_B=-(0.4)(0.9)/0.3=-1.2 \; m/s$$



$$\ddot{x}_B=-(x_A\ddot{x}_A+\dot{x}_A^2+\dot{x}_B^2)/x_B=-7.5-(4/3)\ddot{x}_A$$

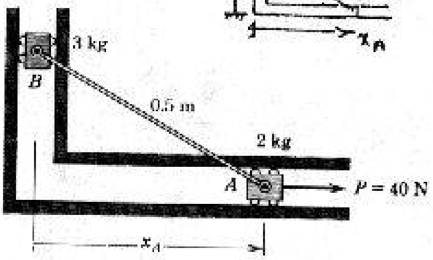
$$a_B=-7.5-(4/3)a_A \quad (1)$$

$$\sum F_x=ma_x \quad 40-(4/5)T=2a_A \quad (2)$$

$$\sum F_x=ma_x \quad -(3/5)T=3a_B \quad (3)$$

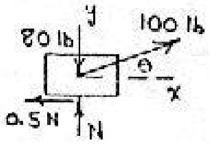
$$(1)-(3) \Rightarrow a_A=1.364 \; m/s^2$$

$$a_B=-9.32 \; m/s^2 \quad T=46.6 \; N$$



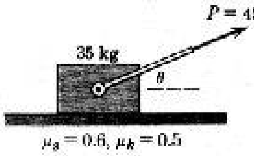
نگاره 3.33

3.34 - θ چه باشد تا بسته به شتاب $9 \; m/s^2$ برسد؟



$$\sum F_x=ma_x: 450\cos\theta-0.5N=35(9)$$

$$\sum F_y=0: N-35(9.81)+450\sin\theta=0 \quad \Rightarrow 2\cos\theta+\sin\theta=2.16$$



$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta} \rightarrow 5\cos^2\theta-8.64\cos\theta+3.67=0$$

$$\theta=12.57^\circ, 41.23^\circ$$

$$\theta=12.57^\circ \Rightarrow N=343-450\sin 12.57^\circ=245 \; N$$

$$F_{max}=0.5(245)=122.5 \; N<450\cos 12.57^\circ=439 \; N$$

نگاره 3.34

www.collegeprozheh.ir

$\theta=41.23^\circ \Rightarrow N=46.76$ N

$F_{max}=23.38$ N $450\cos 41.23^\circ=338.43$ N

3.35 - نیروی P از صفر تا $260\ N$ افزایش می‌یابد شتاب بسته‌ها چگونه است؟

$N_B=755.4$ N $F_{B_{max}}=\mu_s N=(0.15)(755.4)=113.3$ N

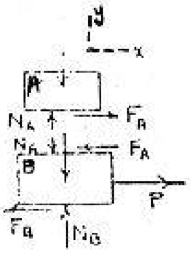
$0 \le P \le 113.3$ no motion

$N_A=343.4$ N $F_{A_{max}}=0.2(343.4)=68.7$ N

A: $\sum F_x=ma_x$ $68.7=35a_A$ $a_A=1.96\ m/s^2$

system: $\sum F_x=ma_x$

$P-0.1(755.4)=77(1.96)$ $P=226.5$ N



$113.3 \le P \le 226.5$

$\sum F_x=ma_x$ $P-0.1(755.4)=77a$

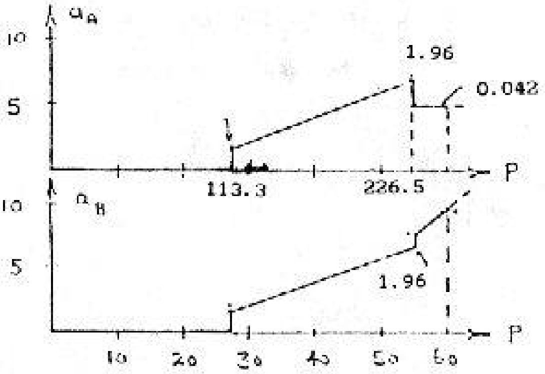
$a_A=a_B=a=0.013P-0.986$

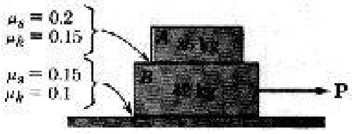
$P\ge 226.5$ N

A: $0.15(343.4)=35a_A$ $a_A=0.042\ m/s^2$

B: $P-(0.1)(755.4)-(0.15)(343.4)=42a_B$

$a_B=0.023P-3.03$





نگاره 3.35

3.36 - A با شتاب a پیش می‌رود. θ چه باشد تا هیچگاه B بر A نلغزد؟ ضریب اصطکاک بین A و B، μ_s است.

$\sum F_x=ma_x$ $N\sin\theta+F\cos\theta=ma$

$\sum F_y=0$ $N\cos\theta-F\sin\theta-mg=0$

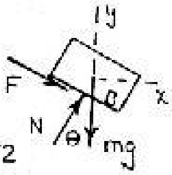
www.collegeprozheh.ir

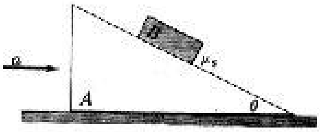
$\Rightarrow F=m(a\cos\theta-g\sin\theta) \quad N=m(a\sin\theta+g\cos\theta)$

$F=\mu_s N \Rightarrow m(a\cos\theta-g\sin\theta)=\mu_s m(a\sin\theta+g\cos\theta)$

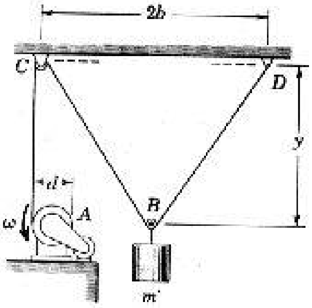
$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}(a-\mu_s g)/(\mu_s a+g)$

$(a>>g) \Rightarrow \underline{\theta=\tan^{-1}(1/\mu_s)} \quad \underline{\tan^{-1}(1/\mu_s) \le \theta \le \Pi/2}$

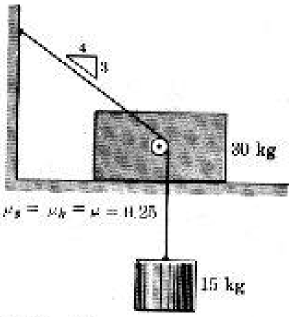




نگاره 3.36



نگاره 3.37



نگاره 3.38

3.37 - وابستگی کشش T و جابه‌جایی y چیست؟

$\sum F_y=ma_y \quad mg-T=m\ddot{y} \quad y^2+b^2=s^2 \quad s=\overline{CB}=\overline{BD}$

$y\dot{y}+0=s\dot{s} \quad 2\dot{s}=-d\omega/2 \Rightarrow y\dot{y}=s(-d\omega/2)$

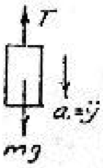
$\dot{y}^2+y\ddot{y}=\dot{s}(-d\omega/4)+0$

$\Rightarrow \ddot{y}=(-\dot{y}^2-\dot{s}\omega d/4)/y=(-s^2\omega^2d^2/16y^2+\omega^2d^2/16)/y$

$\ddot{y}=(\omega^2d^2/16y)(1-s^2/y^2)=(\omega^2d^2/16y)[1-(b^2+y^2)/y^2]$

$=-\omega^2d^2b^2/16y^3$

$\Rightarrow T=mg+m\omega^2d^2b^2/16y^3=\underline{mg(1+\omega^2d^2b^2/16gy^3)}$



3.38 - دستگاه رها می‌شود. کشش T در ریسمان و شتاب بسته بزرگ چیست؟

$a=-\ddot{x} \quad a_1=-\ddot{l} \quad l^2=b^2+x^2 \quad l\dot{l}=0+x\dot{x} \quad \ddot{l}=(x/l)\ddot{x}$

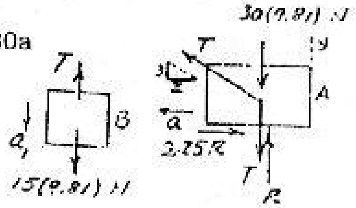
$\Rightarrow a_1=(4/5)a$

$A: \sum F_y=0 \quad R+(3/5)T-30(9.81)-T=0 \quad R=0.4T+294.3$

$\sum F_x=ma_x \quad 0.8T-0.25(0.4T+294.3)=30a$

$B: \sum F_y=ma_y; 15(9.81)-T=15(4a/5)$

$\underline{T=138.0 \text{ N}} \quad \underline{a=0.77 \text{ m/s}^2}$



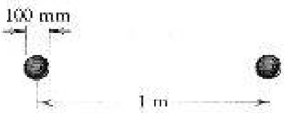
www.collegeprozheh.ir

3.39 - دو گلوله نشان داده با نیروی گرانش به سوی هم حرکت می‌کند. زمان و تندی برخورد چیست؟

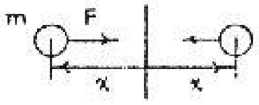
$F=Gm^2/x^2 \quad m=\rho v=7210(4\pi/3)(0.05^3)=3.775\ \text{kg}$

$\sum F_x=ma_x \quad -Gm^2/(2x)^2=mv(dv/dx)$

$(-Gm/4)\int_{x_0=0}^{x} dx/x^2=\int_0^v vdv$



نگاره 3.39



$v=\sqrt{Gm}\ \sqrt{(1/2x)-1}\ =$

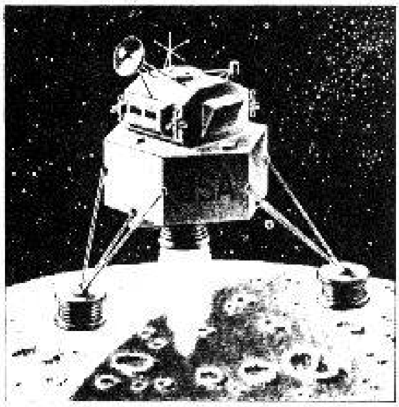
$=\sqrt{(6.673\text{x}10^{-11})(3.775)}\ \sqrt{(1/2(0.05))-1}\ =$

$=4.76\text{x}10^{-5}\ \text{m/s}$

$dx/dt=-\sqrt{Gm}\sqrt{\frac{1/2-x}{x}} \qquad \int_{0.5}^{0.05}\sqrt{x/(1/2-x)}\ dx=\sqrt{Gm}\int_0^t dt$

$t=48{,}800\ \text{s} \quad t=13\ \text{hr}\ 33\ \text{min}$

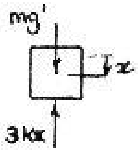
3.40 - ماه‌نشینی به جرم 17.5 Mg با تندی 1.5 m/s بر ماه می‌افتد. اگر سختی هر یک از سه فنر آن 15 kN/m و شتاب گرانشی ماه 1.62 m/s² باشد، بیشینه تکان (jerk) ماه‌نشین چیست؟



نگاره 3.40

$g'=1.62\ \text{m/s}^2 \quad \sum F_x=m\ddot{x} \quad mg'-3kx=m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x}+\omega^2x=g' \quad \omega_n=\sqrt{3k/m}$



$x=A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t+g'/\omega_n^2$

$t=0 \quad x=0 \quad A=-g'/\omega_n^2$

$t=0 \quad \dot{x}=v_o=1.5\ \text{m/s} \quad B\omega_n=v_o \quad B=v_o/\omega_n$

$J=\dddot{x}=-\omega_n^2\dot{x}$

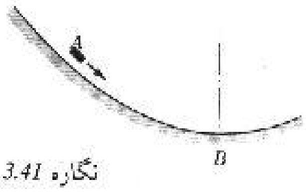
$=-\omega_n^2[(g'/\omega_n)\sin\omega_n t+v_o\cos\omega_n t)$

$J=-\omega_n^2(g'\cos\omega_n t-v_o\omega_n\sin\omega_n t)=0$

$\tan\omega_n t=g'/(v_o\omega_n),\ \sin\omega_n t=g'/\sqrt{v_o^2\omega_n^2+g'^2}$

$\cos\omega_n t=v_o\omega_n/\sqrt{v_o^2\omega_n^2+g'^2} \quad J=-\omega_n\sqrt{v_o^2\omega_n^2+g'^2}$

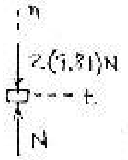
$|J|=4.65\ \text{m/s}^2$



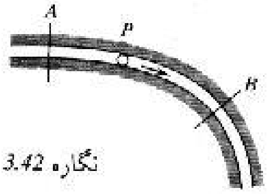
نگاره 3.41

www.collegeprozheh.ir

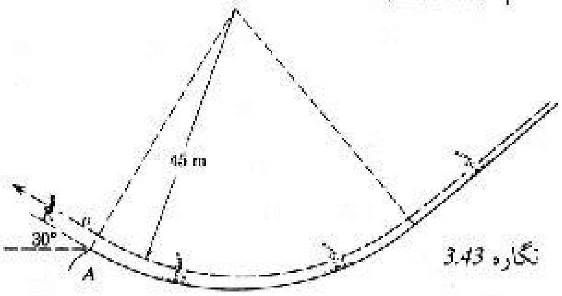
3.41 - ذره A به جرم $2\ kg$ با تندی $3\ m/s$ از B با شعاع خمیدگی $1.5\ m$ می‌گذرد. نیروی واکنش زمین بر A چیست؟



$\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho \quad N - 2(9.81) = 2(3^2)/1.5 \quad \underline{N = 31.6\ N}\ \uparrow$

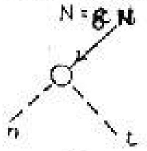


نگاره 3.42



نگاره 3.43

3.42 - ذره P به جرم $1.5\ kg$ با تندی $2\ m/s$ از A پرتاب شده و هنگام گذر از B، نیروی واکنش $8\ N$ می‌پذیرد. شعاع خمیدگی در B چیست؟



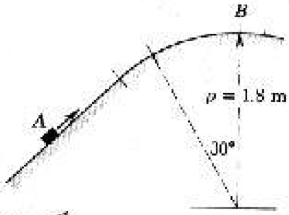
$\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho: \quad 8 = 1.5(2^2/\rho) \quad \underline{\rho = 0.750\ N}$

3.43 - اسکی بازی به جرم $80\ kg$ با تندی $25\ m/s$ از A می‌پرد. واکنش زمین بر او چیست؟

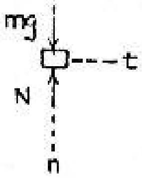
$\sum F_n = ma_n \quad N - 785\cos 30° = 80(25^2/45)$

$N = 1791\ N$

3.44 - ذره A به جرم $2\ kg$ با تندی $2\ m/s$ از B می‌گذرد. واکنش زمین بر آن چیست؟

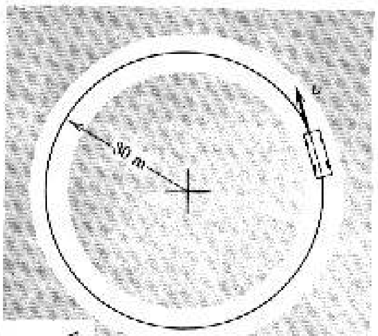


نگاره 3.44



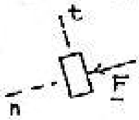
$\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho: 2(9.81) - N = 2(2^2/1.8)$

$\underline{N = 15.18\ N}$



نگاره 3.45

3.45 - اگر خودروی $1400\ kg$ با تندی $55\ km/h$ بر مسیر نشان داده بگردد، دو تا از چرخهایش از زمین بلند می‌شود. a_n و نیروی اصطکاک زمین چیست؟

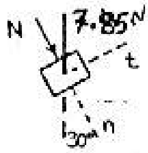


$a_n = v^2/\rho = [(55/3.6)^2]/30 = 0.793g$

www.collegeprozheh.ir

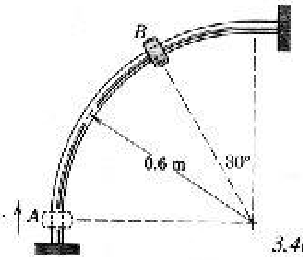
$\sum F_n = ma_n: 1400(7.78) = 10892$ N

3.46 - ماسوره 0.8 kg از A به بالا پرتاب می‌شود و با تندی 4 m/s از B می‌گذرد. (a) واکنش میله و (b) آهنگ کاهش تندی چیست؟

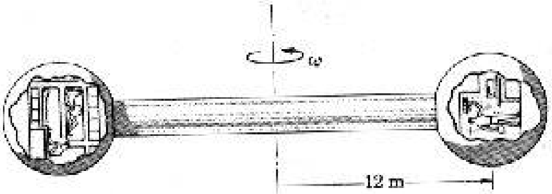


$\sum F_n = mv^2/\rho: N + 7.85\cos30° = 0.8(4^2/0.6)$ $\underline{N = 14.53 \text{ N}}$

$\sum F_t = ma_t: -7.85\sin30° = 0.8\dot{v}$ $\underline{\dot{v} = -4.9 \text{ m/s}^2}$



نگاره 3.46



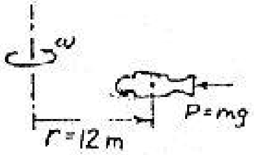
نگاره 3.47

3.47 - تندی چرخشی ایستگاه فضایی چه باشد تا در اتاقها، گرانش زمین پدید آید؟

$\sum F_n = ma_n$ $mg = mr\omega^2$ $\omega = \sqrt{g/r}$

$\omega = \sqrt{9.81/12} = 0.904$ rad/s

$N = 0.904(60/2\pi) = \underline{8.63 \text{ rev/min}}$

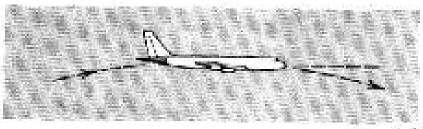


3.48 - کودک، گلوله 50 g را می‌چرخاند. کمترین تندی گلوله در 1 و کشش نخ در 2 چیست؟

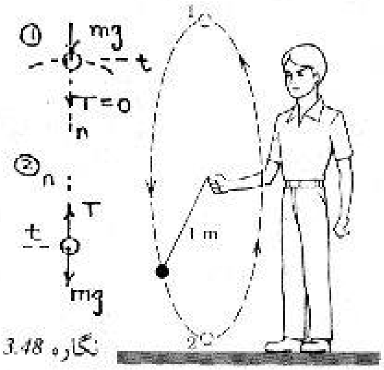
$\sum F_n = mv^2/\rho$ $mg = mv^2/1$ $v = \sqrt{g} = 3.13$ m/s

$\sum F_n = mv^2/\rho$ $T - mg = mg/1$

$T = 2mg = 2(0.050)(9.81) = \underline{0.981 \text{ N}}$

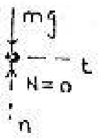


نگاره 3.49



نگاره 3.48

3.49 - ρ چه باشد تا در هواپیما با تندی 900 km/h، بی‌وزنی پدید آید؟



$\sum F_n = ma_n$ $mg = mv^2/\rho$ $\rho = 6371$ m

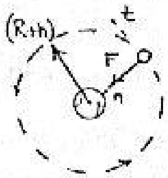
www.collegeprozheh.ir

3.50 - بلندی پرواز ماهواره چه باشد تا دماهنگ آن h 23.9344 باشد؟

$\sum F_n = ma_n \quad T\sin\beta = m(l\sin\beta)\omega^2$

$\sum F_y = 0 \quad T\cos\beta - mg = 0 \quad \underline{T = ml\omega^2}$

$\cos\beta = mg/T = mg/ml\omega^2 \quad l\cos\beta = \underline{h = g/\omega^2}$



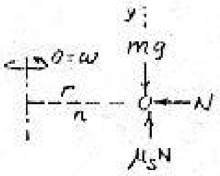
3.51 - کمترین تندی چرخشی چه باشد تا ذره A با ضریب اصطکاک μ_s به پایین نلغزد؟

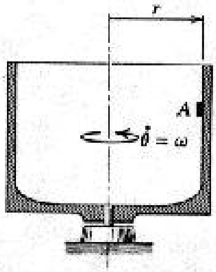
$\sum F_n = ma_n \quad F = Gmm_e/(R+h)^2 = mv^2/(R+h)$

$v = s/t = 2\pi(R+h)/[23.944\times3600]$

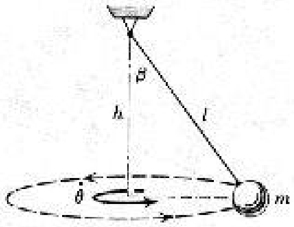
$v = 2\pi(R+h)/[23.944\times3600] = \sqrt{Gm_e/(R+h)}$

$\Rightarrow \underline{h = 3.580\times10^7 m} \; (35,800 \; km)$

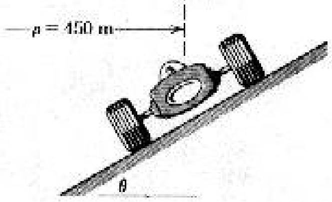




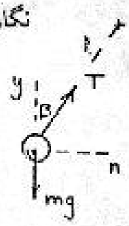
نگاره 3.51



نگاره 3.52



نگاره 3.53



3.52 - بلندی h و کشش ریسمان چیست؟

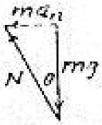
$\sum F_n = ma_n ; N = mr\omega^2 \quad \sum F_y = 0 ; \mu_s(mr\omega^2) = mg$

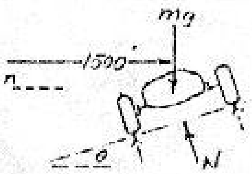
$\omega^2 = g/(\mu_s r) \quad \omega = \sqrt{g/(\mu_s r)}$

3.53 - θ چه باشد تا خودرویی با تندی $200 \; km/h$ به هنگام گذر از پیچ $450 \; m$ به هیچ سو نلغزد؟

$a_n = g\tan\theta \quad \theta = \tan^{-1}(a_n/g) = \tan^{-1}(v^2/g\rho)$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0.641) \quad \underline{\theta = 32.7^\circ}$





3.54 - اگر در پرسش پیش، $\theta = 20^\circ$ و $\rho = 300 \; m$ و $\mu_s = 0.9$ باشد، بازه تندی خودرو برای لیز نخوردن چیست؟

$\sum F_y = 0 : N\cos\theta - mg - \mu_s N\sin\theta = 0$

$\sum F_n = ma_n : N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = mv^2/\rho$

www.collegeprozheh.ir

$v=\sqrt{\rho g(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta-\mu_s\sin\theta)}=$

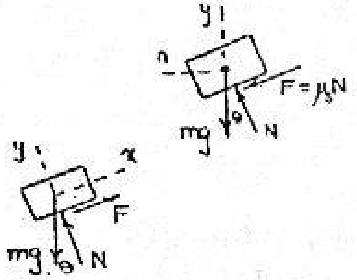
$=74.4$ m/s

$\sum F_x=0 \quad F=mg\sin\theta=0.342mg$

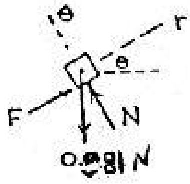
$\sum F_y=0 \quad N=mg\cos\theta=0.940mg$

$F_{max}=\mu_s N=0.9(0.940mg)=0.846mg$

$F>F_{max} \Rightarrow$ no slip $\Rightarrow$ $0\le v\le 74.4$ m/s



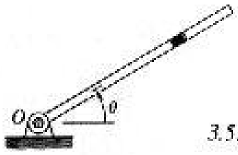
3.55 - ذره 0.1 kg با تندی 1.2 m/s درون لوله تو پوچ چرخنده با 3 rad/s در $\theta=30°$، به سوی O می‌لغزد، واکنش لوله بر ذره چیست؟



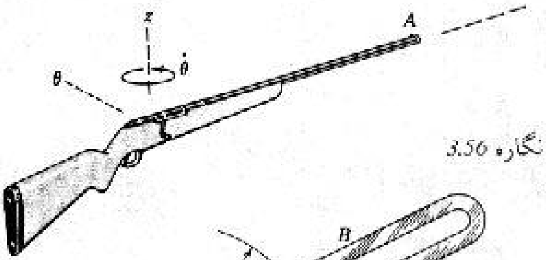
$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)$

$N-0.981\cos30°=0.1(2)(-1.2)(3)$

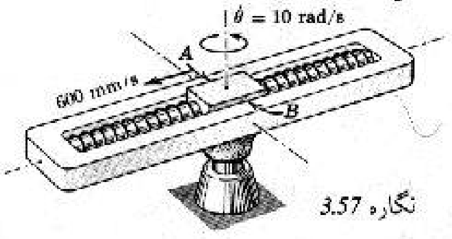
$N=0.1296$ N



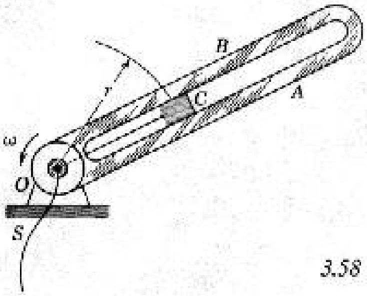
نگاره 3.55



نگاره 3.56

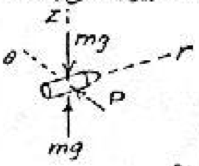


نگاره 3.57



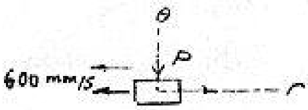
نگاره 3.58

3.56 - تفنگ با $\dot\theta=0.5$ rad/s می‌چرخد و گلوله 60 g با تندی 600 m/s از دهانه بیرون می‌زند. واکنش تفنگ بر گلوله چیست؟



$\sum F_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta) \quad P=0.06(0+2[600][0.5])=36$ N

3.57 - در آرایش نشان داده، کدام پهلو و چه نیرویی بر بسته 1.5 kg می‌نشاند؟



$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)$

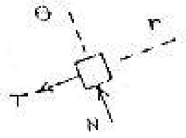
$-P=1.5[0+2(-0.6)(10)] \quad P=18$ N

www.collegeprozheh.ir

$\omega=6\ rad/s$ باشد و با آهنگ $2\ rad/s^2$ کاهش یابد، کشش ریسمان و نیروی شیار بر C چیست؟

$\sum F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$

$-T=2[0+0.055(-6)]$ $\underline{T=0.66\ N}$



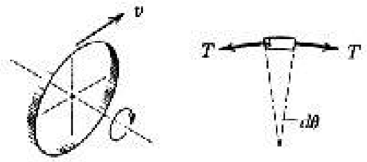
$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})$

$N=2[-2+2(0.055)(-6)]$

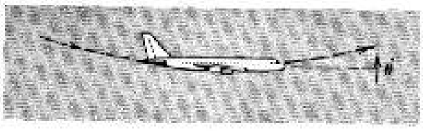
$\underline{N=-5.32\ N}$

3.59 - نیروی کشش بر لبه حلقه‌ای که با تندی v در کناره، می‌چرخد چیست؟

$\sum F_n=ma_n$ $2T\sin(d\theta/2)=\rho r d\theta(v^2/r)$ $\underline{T=\rho v^2}$

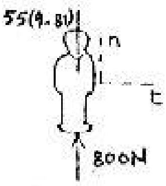


نگاره 3.59



نگاره 3.60

3.60 - $\dot{\theta}$ چه باشد تا یک خانم به جرم $55\ kg$ شماره $800\ N$ را بر ترازوی درون هواپیما با تندی $900\ km/h$ بسنجد؟



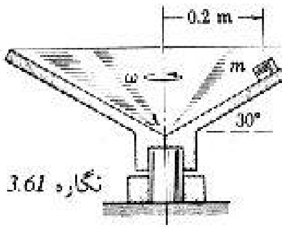
$960\ km/hr=266.7\ m/s$

$\sum F_n=ma_n$ $800-55(9.81)=55a_n$ $a_n=4.74\ m/s^2$

$a_n=v\dot{\theta}$ $\dot{\theta}=a_n/v=4.74/266.7=0.018\ r/s$ $=\underline{1.031\ deg/s}$

$a_n=v^2/\rho$ $\rho=v^2/a_n$ $=266.7^2/4.74=\underline{15006\ m}$

3.61 - بازه ω چه باشد تا m با ضریب اصطکاک 0.3 به هیچ سو نلغزد؟

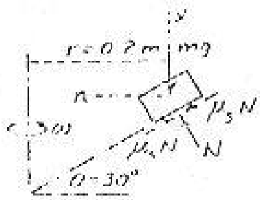


نگاره 3.61

μ_sN μ_sN $\sum F_y=0; N\cos\theta=\mu_s N\sin\theta=mg$

$\sum F_n=ma_n; N\sin\theta=\mu_s N\sin\theta=mr\omega^2$

$(\sin\theta\ \pm\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta\ \mp\mu_s\sin\theta)=r\omega^2/g$



$\omega=\sqrt{g/r}\sqrt{(\sin\theta\ \pm\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta\ \mp\mu_s\sin\theta)}$

$\underline{\omega_{min}=3.41\ rad/sec}$ $\underline{\omega_{max}=7.21\ rad/sec}$

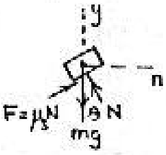
www.collegeprozheh.ir

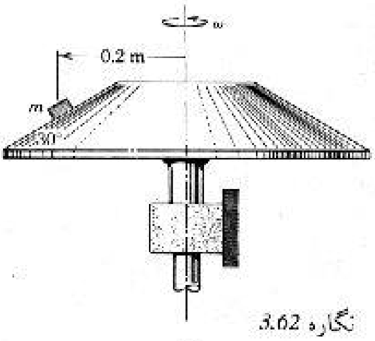
3.62 - بیشینه ω چه باشد تا m با ضریب اصطکاک 0.8 نلغزد؟

$\sum F_y=0$: $N\cos\theta-mg+\mu_s N\sin\theta=0$

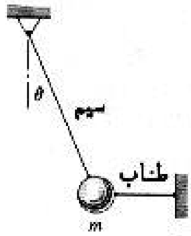
$\sum F_n=ma_n$: $-N\sin\theta+\mu_s N\cos\theta=mr\omega^2$

$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{r}\dfrac{(\mu_s\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\mu_s\sin\theta)}}=\underline{2.73 \text{ rad/s}}$

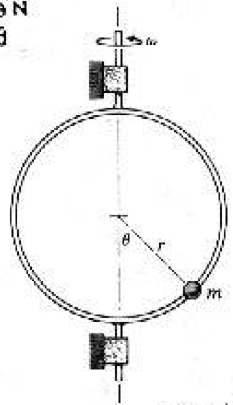




نگاره 3.62

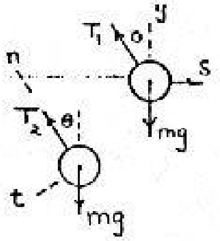


نگاره 3.63



نگاره 3.64

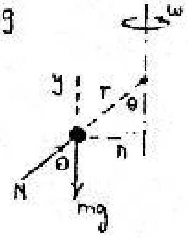
3.63 - کشش سیم، پس از بریدن طناب به پیش از بریدن آن چیست؟



$\sum F_y=0: T_1\cos\theta=mg \quad \sum F_n=ma_n=mv^2/r=0$

$T_2=mg\cos\theta \Rightarrow k=T_2/T_1=\cos^2\theta$

3.64 - وابستگی ω و θ چیست؟



$\sum F_y=0: N\cos\theta-mg=0 \quad N=mg/\cos\theta$

$\sum F_n=ma_n: N\sin\theta=m(r\sin\theta)\omega^2$

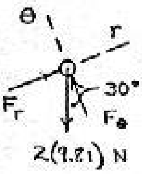
$\omega=\sqrt{g/(r\cos\theta)} \quad \cos\theta=g/r\omega^2<<1 \quad \omega^2\geq g/r$

3.65 - کمترین نیروی P با ضریب اصطکاک 0.5 چه باشد تا گلوله 2 kg در $\theta=30^\circ$ و $\dot\theta=-50$ deg/s و $\ddot\theta=200$ deg/s و $r=-500$ mm/s چیست؟ کمترین نیروی P_s ایستا چیست؟

$\sum F_r=ma_r=m(\ddot r-r\dot\theta^2)$

$F_r-19.62\sin30^\circ=2[0-1(-0.873)^2] \Rightarrow F_r=8.29$ N

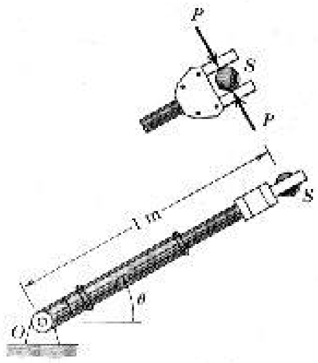
$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta) \quad F_\theta-19.62\cos30^\circ=25.7$ N



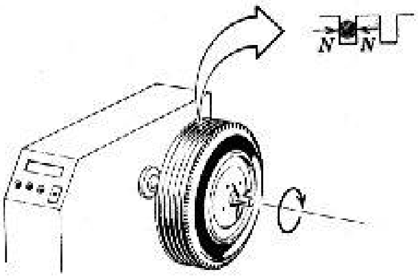
$F=\sqrt{F_r^2+F_\theta^2}=27.0$ N $\quad P=F/2\mu_s=27.0/1=\underline{27.0 \text{ N}}$

static gripping force $=\underline{19.6 \text{ N}}$

www.collegeprozheh.ir

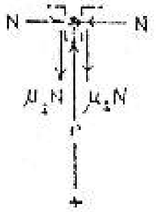


نگاره 3.65



نگاره 3.66

3.66 - اگر ریگ 10 g در 4000 rev/min از چرخ به قطر 700 mm بیرون بپرد، نیروی نگهدارنده ریگ با ضریب اصطکاک 0.9 چیست؟



$\omega=(4000 \text{ rev/min}) = 418.9 \text{ rad/sec}$

$\sum F_n = ma_n \quad 2\mu_s N = mr\omega^2 \quad N = mr\omega^2/2\mu_s \quad \underline{N=323 \text{ N}}$

3.67 - کامیون با شتاب 2 m/s^2 بر پیچ و شیب نشان داده، به راه می‌افتد. با ضریب اصطکاک 0.3، کی بسته می‌لغزد؟

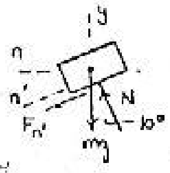
$\sum F_y = 0 \quad N\cos10^\circ - F_n\sin10^\circ - mg = 0$

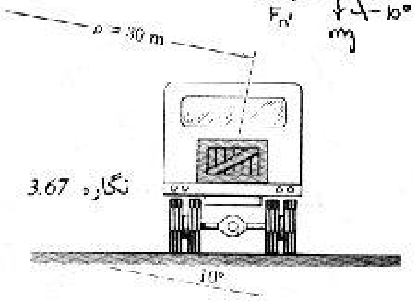
$\sum F_n = ma_n \quad F_n\cos10^\circ + N\sin10^\circ = m(2t)^2/30$

$\sum F_t = ma_t \quad F_t = m(2) \quad F_n = m[4t^2\cos10^\circ/30 - g\sin10^\circ]$

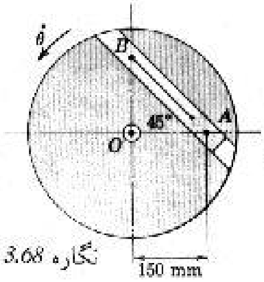
$N = m[4t^2\sin10^\circ/30 + g\cos10^\circ]$

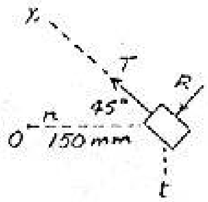
$\sqrt{F_t^2 + F_n^2} = \mu_s N \quad \underline{t=5.58 \text{ s}}$





نگاره 3.67





نگاره 3.68

3.68 - کشش ریسمان نگهدارنده A در $\dot{\theta}=300$ rev/min چیست؟ اگر چرخش وارون باشد آیا کشش تغییر می‌کند؟

$a_n = r\dot{\theta}^2 = 0.15(300\times2\pi/60)^2 = 148.0 \text{ m/s}^2$

$\sum F_x = ma_x ; T = 3(148.0\cos45^\circ) = \underline{314 \text{ N}}$

www.collegeprozheh.ir

3.69 - اگر گرده نشان داده با شتاب $0.5\ rad/s^2$ به راه افتد، کشش سیمهای 1 و 2 و نیروی شیار بر بسته 2 kg در بازه $0\le t\le 5$ s چگونه است؟

$\omega=\omega_o+\alpha t=0.5t$

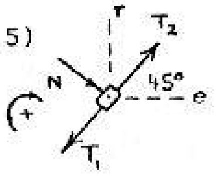
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-0.1(0.5t)^2=-0.025t^2\ m/s^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0.1(0.5)=0.05\ m/s^2 \quad t=1.414\ s$

$0<t<1.414\ s$

$\sum F_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \quad -N\cos45^\circ+T_2\cos45^\circ=2(-0.1)(0.5t)^2$

$\sum F_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}): N\cos45^\circ+T_2\cos45^\circ=2(0.1)(0.5)$



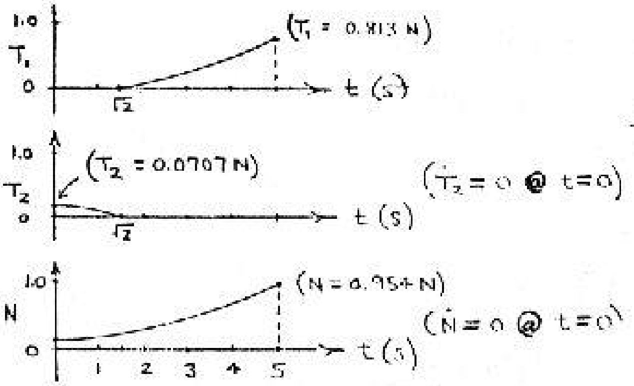
$T_2=0.0707-0.0354t^2 \quad N=0.0707+0.0354t^2$

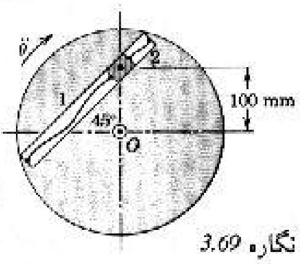
$1.414\le t\le 5\ s$

$\sum F_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \quad -N\cos45^\circ+T_1\cos45^\circ=2(-0.1)(0.5t)^2$

$\sum F_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}): N\cos45^\circ-T_1\cos45^\circ=2(0.1)(-0.5)$

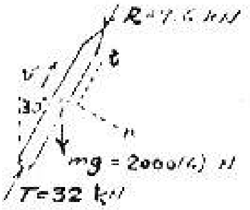
$T_1=-0.0707+0.354t^2 \quad N=0.0707+0.0354t^2$





نگاره 3.69

3.70 - موشک 2000 kg با $T=32\ kN$ و $R=0.6\ kN$ و شتاب گرانش $6\ m/s^2$ با تندی 3 km/s پیش می‌رود. شعاع خمیدگی و تغییر تندی موشک چیست؟



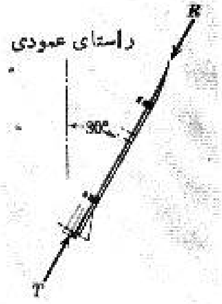
$\sum F_n=ma_n \quad 2000(6)\sin30^\circ=2000(3000)^2/\rho$

$\rho=3000\ km$

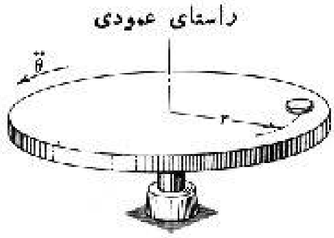
$\sum F_t=m\dot{v} \quad 32(10^3)-2000(6)\cos30^\circ-9600=2000\dot{v}$

www.collegeprozheh.ir

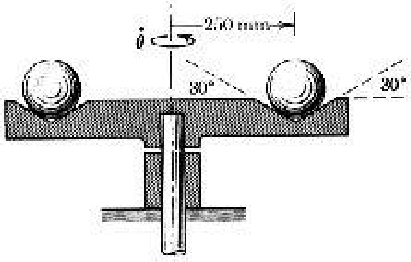
$\dot{v}=6.00\ m/s^2$



نگاره 3.70



نگاره 3.71



نگاره 3.72

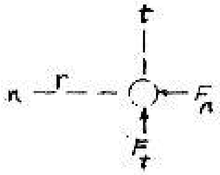
3.71 - اگر گرده با $\ddot{\theta}=\alpha$ به راه افتد، پیش از لغزیدن سکه با ضریب اصطکاک μ_s، چند بار می‌چرخد؟

$\sum F_t=ma_t \quad F_t=mr\alpha \quad \sum F_n=ma_n \quad F_n=mr\omega^2$

$F_{max}=\mu_s N=\mu_s mg \Rightarrow mr\sqrt{\alpha^2+\omega^4}=\mu_s mg$

$\omega^2=\sqrt{(\mu_s g)^2-(r\alpha)^2}/r \quad \omega^2=2\alpha\theta=2\alpha(2\pi N)$

$N=\omega^2/4\pi\alpha=(1/4\pi)\sqrt{(\mu_s g/r\alpha)^2-1}$



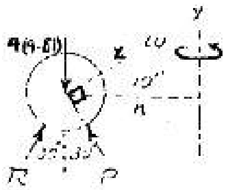
3.72 - با $\dot{\theta}=30\ rev/min$، نیروی واکنشی بزرگتر بر گلوله‌های 4 kg چیست؟

$\omega=30\times2\pi/60=\pi\ rad/s$

$\sum F_y=0 \quad (R+P)\cos30°=4(9.81)=39.24$

$\sum F_n=ma_n \quad (R-P)\sin30°=4(.250)\pi^2=9.87$

$2R=45.31+19.74 \quad \underline{R=32.53\ N}$

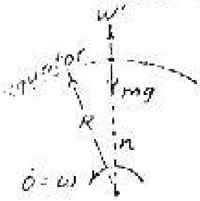


$\sum F_x=ma_x$

$R\cos30°-39.24\sin30°=4(0.250)\pi^2\cos30°$

$R=\underline{32.53\ N}$

3.73 - چیزی به وزن 100 N، در استوا با گرانش مطلق $g=0.815\ m/s^2$ زمین چه وزنی دارد؟



$\sum F_n=ma_n \quad mg-W'=mR\omega^2 \quad W'=m(g-R\omega^2)$

$k=W'/mg=\underline{1-R\omega^2/g}$

$W'=mg(1-R\omega^2/g)=100(1-0.00345)=\underline{99.655\ N}$

www.collegeprozheh.ir

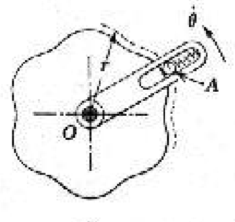
3.74 - با $\dot{\theta}=\omega=12$ rad/s و $r_0=100$ mm و $b=10$ mm و $r=r_0+bSinN\omega t$ و $N=6$ و نیروی فنر بین 11.5 N و 19.1 N، نیروی بادامک بر میخ 100 gr در نوک یک برآمدگی چیست؟

$r=100+10\sin(6\times12t)$ mm $\dot{r}=720\cos72t$ mm/s

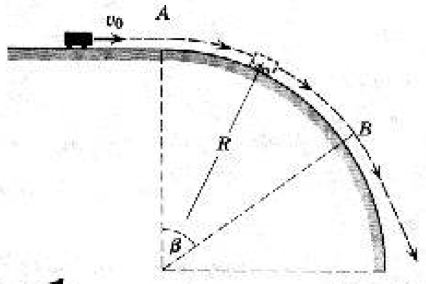
$\ddot{r}=-51.84\sin72t$ m/s^2 $r=r_{max} \Rightarrow \cos72t=0$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-51.84-0.110(12)^2=-66.7$ m/s^2

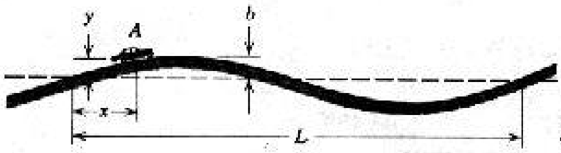
$\sum F_r=ma_r: R-19.1=0.1(-67.7)$ $\underline{R=12.33 \text{ N}}$



نگاره 3.74



نگاره 3.75

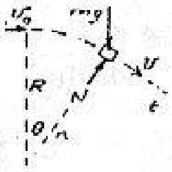


نگاره 3.76

3.75 - ارابه در چه β از زمین جدا می‌شود؟

$\sum F_t=ma_t; mg\sin\theta=ma_t, a_t=g\sin\theta$

$\int vdv=\int a_t ds \quad \int_{v_0}^{v} vdv=\int_0^{\theta} g\sin\theta(Rd\theta)$



$v^2=v_0^2+2gR(1-\cos\theta) \quad \sum F_n=ma_n; mg\cos\theta-N=mv^2/R$

$\underline{\beta=\cos^{-1}(2/3+v_0^2/3Rg)}$

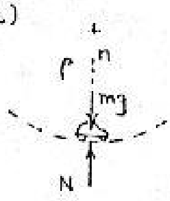
3.76 - بیشترین تندی خودرو در گذر از برآمدگی $y=bSin(\frac{2\pi x}{l})$ چه باشد تا از جاده جدا نشود؟ با آن تندی، واکنش در پایین گودی جاده چیست؟

$\sum F_n=ma_n \quad mg=mv^2/\rho \quad v=\sqrt{g\rho}$

at top: $dy/dx=0$, $\rho=(d^2y/dx^2)^{-1}$, $y=b\sin(2\pi x/L)$

$\Rightarrow dy/dx=(2\pi b/L)\cos(2\pi x/L)$

$d^2y/dx^2=-(4\pi^2b/L^2)\sin(2\pi x/L)$



$x=L/4$, $\sin(2\pi x/L)=1$, $|d^2y/dx^2|=1/\rho=4\pi^2b/L^2$

$\Rightarrow v=(L/2\pi)\sqrt{g/b}$

at bottom: $\sum F_n=ma_n \quad N-mg=m(g\rho/\rho) \quad \underline{N=2mg}$

www.collegeprozheh.ir

3.77 - خودرو با تندی $70\ km/h$ و شتاب $0.5\ g$ از جاده نشان داده می‌گذرد. کمترین شیب صندلی θ چه باشد تا بسته با ضریب اصطکاک (a) 0.2 و (b) 0.4 نلغزد؟

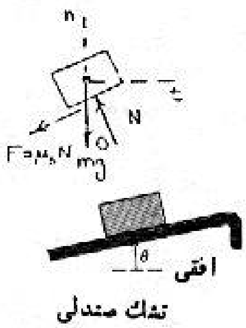
$\sum F_n=ma_n \quad N\cos\theta-\mu_s N\sin\theta-mg=m(19.44^2/80)$

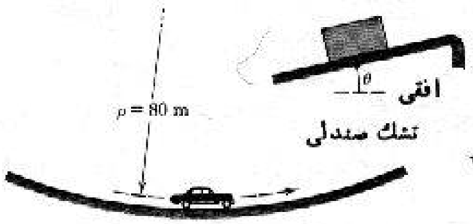
$\sum F_t=ma_t \quad -\mu_s N\cos\theta-N\sin\theta=-mg/2$

$\Rightarrow N=(mg/2)/(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)$

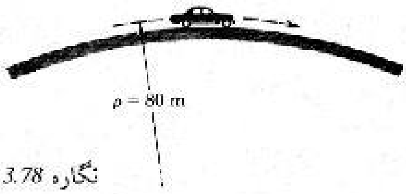
$\tan\theta=(1-2.9635\mu_s)/(\mu_s+2.9635)$

$\mu_s=0.2 \Rightarrow \underline{\theta=7.34^\circ} \quad \mu_s=0.4 \Rightarrow \underline{\theta=-3.16^\circ}$!!





نگاره 3.77



نگاره 3.78

3.78 - پرسش پیش را با آرایش نوین پاسخ دهید.

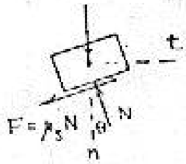
$\sum F_t=ma_t \quad -\mu_s N\cos\theta-N\sin\theta=-mg/2$

$N=(mg/2)/(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)$

$\sum F_n=ma_n \quad -N\cos\theta+\mu_s N\sin\theta+mg=m(19.44^2/80)$

$\tan\theta=(1-1.036\mu_s)/(\mu_s+1.036)$

$\mu_s=0.2 \Rightarrow \underline{\theta=32.7^\circ}\ ,\ \underline{N>0} \quad \mu_s=0.4 \Rightarrow \underline{\theta=22.2^\circ}\ ,\ \underline{N>0}$



3.79 - خودرو با نیروی پیشران T و کشش زمین، از A به راه می‌افتد. تندی آن در B و واکنش زمین چیست؟

$\sum F_t=ma_t \quad T+mg\cos\theta=ma_t$

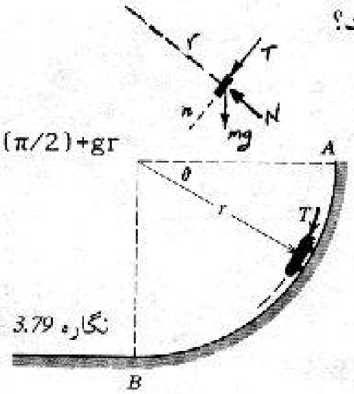
$a_t=T/m+g\cos\theta \quad vdv=a_t(rd\theta)$

$\int_0^v vdv=\int_0^{\pi/2}(T/m+g\cos\theta)rd\theta \quad v^2/2=(Tr/m)(\pi/2)+gr$

$v^2=r(\pi T/m+2g) \quad v=\sqrt{r(\pi T/m+2g)}$

at B: $\sum F_n=ma_n \quad N-mg=mv^2/r$

$N=mg+T\pi+2mg \quad \underline{N=T\pi+3mg}$



نگاره 3.79

www.collegeprozheh.ir

3.80 ماهواره S با جرم $150\ kg$ و تندی $v=26730\ km/h$ در آرایش نشان داده با نیروی $519\ N$ به سوی زمین کشیده می‌شود. $\ddot{r}$ چیست؟

$v=26730/3.6=7425\ m/s$

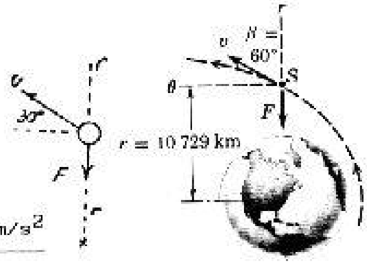
$F=519\ N \quad r=10729\ km=10729000\ m$

$m=150\ kg \quad v_r=\dot{r}=7425\sin 30^\circ=3712.5\ m/s$

$v_\theta=r\dot{\theta}=7425\cos 30^\circ=6430.2\ m/s$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\ddot{r}-(r\dot{\theta})^2/r=\ddot{r}-3.85\ m/s^2$

$\sum F_t=ma_t \quad -519=150(\ddot{r}-3.85) \quad \ddot{r}=-0.39\ m/s^2$



نگاره 3.80

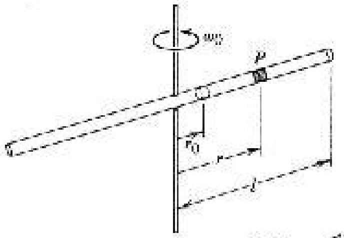
3.81 - ذره P از $r=r_0$ در $t=0$ به راه می‌افتد. v_r و v_θ و r در زمانهای دیگر چیست؟ مسیر ذره با $r_0=0.1\ m$ و $l=1\ m$ و $\omega_0=1\ rad/s$ چگونه است؟

$\sum F_r=ma_r \quad 0=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \quad \ddot{r}=r\dot{\theta}^2=r\omega_0^2 \quad \dot{r}d\dot{r}/dr=r\omega_0^2 \quad \int_0^{\dot{r}}\dot{r}d\dot{r}=\omega_0^2$

$\int_{r_0}^{r} r\,dr \quad \dot{r}=\omega_0\sqrt{r^2-r_0^2}=v_r$

$dr/dt=\omega_0\sqrt{r^2-r_0^2} \quad \int_{r_0}^{r} dr/\sqrt{r^2-r_0^2}=\omega_0\int_0^t dt$

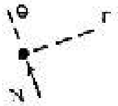
$\Rightarrow r=(r_0/2)[e^{-\omega_0 t}+e^{\omega_0 t}]$



نگاره 3.81

$v_\theta=r\dot{\theta}=r\omega_0=(r_0\omega_0/2)[e^{-\omega_0 t}+e^{\omega_0 t}]$

$v_r=(r_0\omega_0/2)[e^{\omega_0 t}-e^{-\omega_0 t}]$



$v_r=r_0\omega_0\sinh(\omega_0 t)$

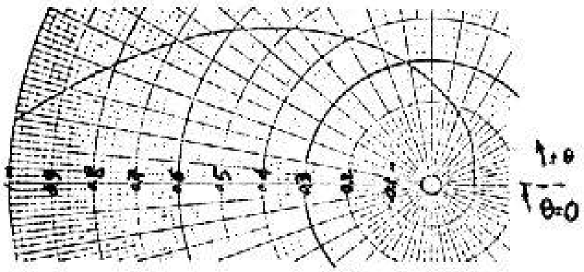
$r=r_0\cosh(\omega_0 t)$

$v_\theta=r_0\omega_0\cosh(\omega_0 t)$

$v_r=0.1\sinh t$

$r=0.1\cosh t$

$v_\theta=0.1\cosh t$



(r = 1.0 m @ θ = 171.5°)

www.collegeprozheh.ir

3.82 - در پرسش پیش، گمان کنید که ضریب اصطکاک جنبشی، μ_k باشد، $r(t)$ چیست؟

$$\sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad N = m(2\dot{r}\omega_o)$$

$$\sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad -\mu_k N = m(\ddot{r} - r\omega_o^2)$$

$$-\mu_k(2m\dot{r}\omega_o) = m(\ddot{r} - r\omega_o^2) \qquad \ddot{r} + 2\mu_k\omega_o\dot{r} - \omega_o^2 r = 0$$

$$r = Ce^{st} \Rightarrow s_{1,2} = \omega_o[-\mu_k \pm \sqrt{\mu_k^2+1}] \qquad r = C_1e^{s_1 t} + C_2e^{s_2 t}$$

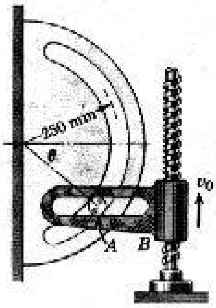
$$r(0) = r_o \;,\; \dot{r}(0) = 0 \Rightarrow r_o = C_1 + C_2 \qquad 0 = C_1s_1 + C_2s_2$$

$$\Rightarrow C_1 = -s_2r_o/(s_1 - s_2) \qquad C_2 = s_1r_o/(s_1 - s_2)$$

$$r(t) = (r_o/2\sqrt{\mu_k^2+1})[(\mu_k + \sqrt{\mu_k^2+1})e^{\omega_o(-\mu_k + \sqrt{\mu_k^2+1})t} +$$

$$+(-\mu_k + \sqrt{\mu_k^2+1})e^{\omega_o(-\mu_k - \sqrt{\mu_k^2+1})t}$$

3.83 - با $v_0 = 2 \ m/s$ و $\theta = 30°$، نیروی شیار بر میخ A چیست؟



نگاره 3.83

$$v = v_o/\cos 30° = 2/0.866 = 2.31 \ m/s$$

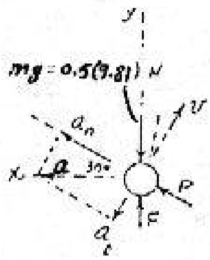
$$a_n = v^2/r = (2.31)^2/0.25 = 21.3 \ m/s^2$$

$$\dot{v}_y = \dot{v}_o = 0 \Rightarrow a = a_x \qquad a_t = a\tan 30°$$

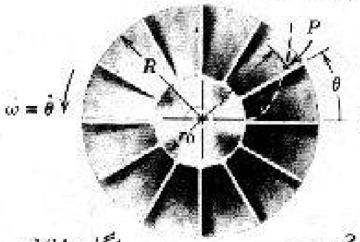
$$a_t = 21.3(1/\sqrt{3}) = 12.32 \ m/s^2$$

$$a = a_x = 21.3/0.5 = 24.64 \ m/s^2$$

$$\sum F_x = ma_x \qquad P(0.866) = 0.5(24.64) \qquad \underline{P = 14.22 \ N}$$



3.84 - ذره‌ای از $r = r_0$ به راه افتاده است. نیروی پره بر ذره به هنگام بیرون افتادن چیست؟

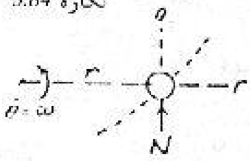


نگاره 3.84

$$\sum F_r = ma_r \qquad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Rightarrow r = r_o\cosh(\omega t) \qquad \dot{r} = r_o\omega\sinh(\omega t)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \qquad N = m(0 + 2\dot{r}\omega) = 2mr_o\omega^2\sinh(\omega t)$$



$$\cosh^2(\omega t) - \sinh^2(\omega t) = 1 \qquad \sinh^2(\omega t) = \cosh^2(\omega t) - 1$$

$$\sinh(\omega t) = \sqrt{(r/r_o)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow N = 2mr_o\omega^2\sqrt{(r/r_o)^2 - 1} = 2m\omega^2\sqrt{r^2 - r_o^2}$$

www.collegeprozheh.ir

3.85 - هر یک از چهار چرخ خودروی kg 1350 تا N 2500 نیرو می‌پذیرد. ترمز بیشینه در A با تندی m/s 25 و راه پیش رفته تا ایست چیست؟

A-B: $\sum F_x = ma_x \quad -4(2500)=1350a \Rightarrow a=-7.407\ \mathrm{m/s^2}$

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(x_B - x_A) \quad v_B^2 - 25^2 = 2(-7.407)(10)$

$v_B = 21.84\ \mathrm{m/s}$

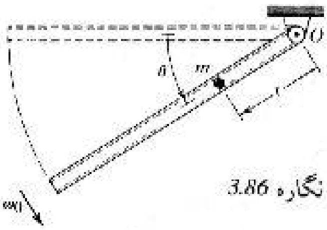
B- : $F = ma_{tot} \quad a_{tot} = 10{,}000/1350 = 7.407\ \mathrm{m/s^2}$

$a_{tot} = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{v^4/\rho^2 + a_t^2} \quad a_t = v\,dv/ds = -\sqrt{a_{tot}^2 - v^4/\rho^2}$

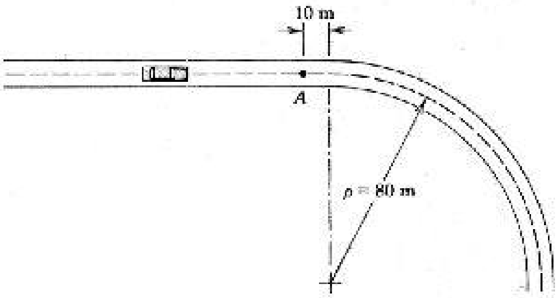
$\int_{10}^{s} ds = -\rho \int_{v_B}^{0} v\,dv/\sqrt{\rho^2 a_{tot}^2 - v^4}$

$x = v^2 \quad s - 10 = -\rho \int_{v_B^2}^{0} (dx/2)/\sqrt{\rho^2 a_{tot}^2 - x^2}$

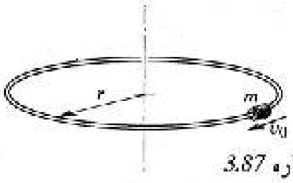
$s = 10 + (\rho/2)\sin^{-1}(v_B^2/\rho a_{tot}) = \underline{47.4\ \mathrm{m}}$



نگاره 3.86



نگاره 3.85

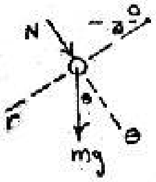


نگاره 3.87

3.86 - ذره m در θ=0 در r=0 است. r(θ) چیست؟

$\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$mg\sin\theta = m(\ddot{r} - r\omega_o^2)$



$\ddot{r} - r\omega_o^2 = g\sin\omega_o t \quad r_h = Ce^{st} \Rightarrow s_1 = -\omega_o \quad s_2 = \omega_o$

$r_p = D\sin\omega_o t \quad D = -g/2\omega_o^2$

$r = r_h + r_p = C_1 e^{-\omega_o t} + C_2 e^{\omega_o t} - (g/2\omega_o^2)\sin\omega_o t \qquad r(0) = C_1 + C_2 = 0$

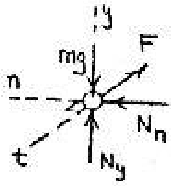
$\dot{r}(0) = -\omega_o C_1 + \omega_o C_2 - g/2\omega_o = 0$

www.collegeprozheh.ir

$$r=(-g/4\omega_o^2)e^{-\theta}+(g/4\omega_o^2)e^{\theta}-(g/2\omega_o^2)\sin\theta$$

3.87 - ماسوره m با تندی v_o رها می‌شود. با ضریب اصطکاک μ_k، کجا می‌ایستد؟

$\sum F_y=0 \quad N_y=mg \quad \sum F_n=ma_n \quad N_n=mv^2/r$



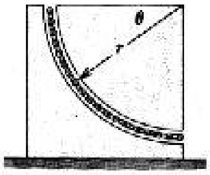
$F=\mu_k N_{tot}=\mu_k\sqrt{(mg)^2+(mv^2/r)^2}=(\mu_k m/r)\sqrt{r^2g^2+v^4}$

$\sum F_t=ma_t \quad -(\mu_k m/r)\sqrt{r^2g^2+v^4}=mvdv/ds$

$(-\mu_k/r)\int_0^s ds=\int_{v_o}^0 vdv/\sqrt{r^2g^2+v^4}=\int_{v_o^2}^0 (dx/2)/\sqrt{x^2+r^2g^2} \qquad x=v^2$

$dx=2vdv \quad -\mu_k s/r=(1/2)\ln[x+\sqrt{x^2+r^2g^2}]_{v_o^2}^0$

$s=(r/2\mu_k)\ln[(v_o^2+\sqrt{r^2g^2+v_o^4})/rg]$



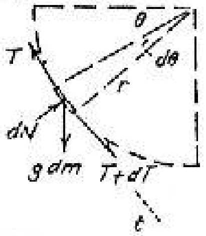
نگاره 3.88

3.88 - زنجیر از آرایش نشان داده رها می‌شود. شتاب a_t و کشش $T(\theta)$ پس از رهایی چیست؟

$gdm=\rho grd\theta \quad \sum F_t=ma_t$

$(T+dT)\cos(d\theta/2)-T\cos(d\theta/2)+\rho gr\cos\theta\cdot d\theta=\rho ra_t d\theta$

$dT+\rho gr\cos\theta\ d\theta=\rho ra_t d\theta \quad dT=\rho r(a_t-g\cos\theta)d\theta$

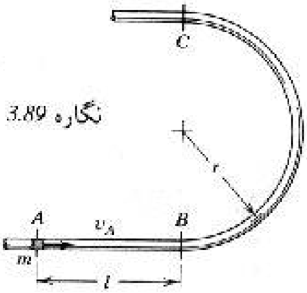


$\int_0^T dT=\rho r\int_0^\theta (a_t-g\cos\theta)d\theta \quad T=\rho r(a_t\theta-g\sin\theta)$

$\theta=\pi/2, T=0, \Rightarrow 0=\rho r(a_t\pi/2-9)$

$\Rightarrow a_t=2g/\pi \quad T=\rho gr(2\theta/\pi-\sin\theta)$

3.89 - با ضریب اصطکاک μ_k، تندی v_A چه باشد تا ذره m درجایی بین B و C بایستد؟

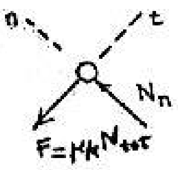


نگاره 3.89

A-B: $a=-\mu_k g \Rightarrow v_B^2=v_A^2-2\mu_k gl$

B-C: $N=mg \quad \sum F_n=mv^2/\rho \quad N_n=mv^2/r$

$\sum F_t=ma_t \quad -\mu_k N_{tot}=mvdv/ds$



$-\mu_k\sqrt{N^2+N_n^2}=mvdv/ds$

$-\mu_k\sqrt{(mg)^2+(mv^2/r)^2}=mvdv/ds$

www.collegeprozheh.ir

$$(-\mu_k/r)\int_0^s ds=\int_{v_B}^{0} v\,dv/\sqrt{r^2g^2+v_o^4}=\int_{v_B^2}^{0}(dx/2)/\sqrt{x^2+r^2g^2}$$

$$\Rightarrow 2\mu_k s/r=\ln[(v_B^2+\sqrt{v_B^4+r^2g^2})/rg]$$

$$rge^{2\mu_k s/r}-v_B^2=\sqrt{v_B^4+r^2g^2}$$

$$v_B^2=(rg/2)[e^{2\mu_k/r}-e^{-2\mu_k/r}]$$

$$s=0 \Rightarrow v_B^2=0 \quad s=\pi r \Rightarrow v_B^2=(rg/2)[e^{2\mu_k/\pi}-e^{-2\mu_k/\pi}]$$

$$v_A^2=v_B^2+2\mu_k gl \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{2\mu_k gl}<\le v_A \le \sqrt{2\mu_k gl+(rg/2)[e^{2\mu_k/\pi}-e^{-2\mu_k/\pi}]}$$

$$\sqrt{2\mu_k gl}<\le v_A \le \sqrt{rg\sinh(2\mu_k\pi)+2\mu_k gl}$$

3.90 - بازو با 20 rad/s بر بادامک $r=100-75\cos\theta$ mm می‌چرخد. نیروی بادامک بر میخ A به جرم 0.5 kg در $\theta=60^\circ$ با فنری به سختی 4.5 kN/m و آزاد در $\theta=0$، چیست؟

$$a_r=(2c\cos\theta-b)\omega^2=[0.15(0.5)-0.1](20)^2=-10 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta=2c\omega^2\sin\theta=0.15(20)^2\sqrt{3}/2=52.0 \text{ m/s}^2$$

$$C=k\Delta r=5.4[(100-75/2)-(100-75)]=202 \text{ N}$$

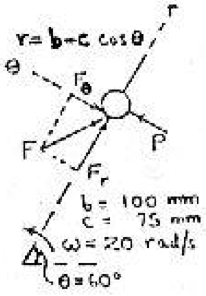
$$\sum F_r=ma_r \quad F_r-202=0.5(-10) \quad F_r=197 \text{ N}$$

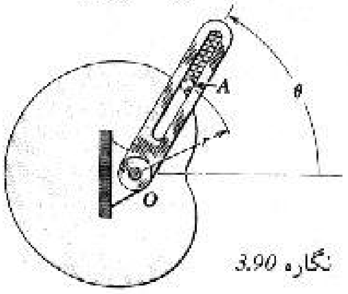
$$F_\theta/F_r=dr/rd\theta \quad F_\theta=(dr/rd\theta)F_r$$

$$F_\theta=(cF_r/r)\sin\theta=$$

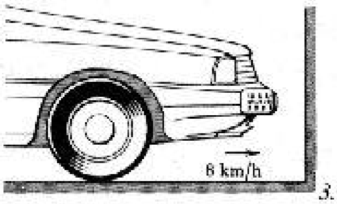
$$=[(75/(100-75/2))(\sqrt{3}/2)(197)=205 \text{ N}$$

$$\sum F_\theta=ma_\theta \quad P-205=0.5(52.0) \quad \underline{P=231 \text{ N}}$$





نگاره 3.90



نگاره 3.91

3.91 - سختی دو فنر پشت سپر چه باشد که پس از 15 cm فشردگی، خودروی 1500 kg را نگه دارد؟

www.collegeprozheh.ir

$U=\Delta T \quad 2(kx^2/2)=mv^2/2-0$

$k=mv^2/2x^2=$

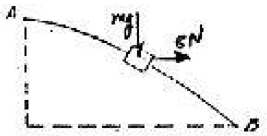
$=(1/2)[1500(2.22^2)/(0.15)^2]$

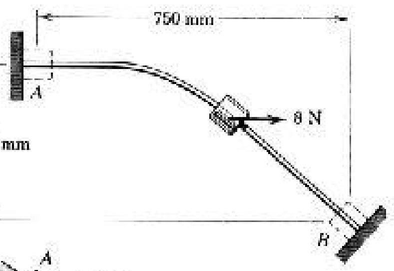
$=164280$ N/m $=\underline{164.3 \text{ kN/m}}$

3.92 - ماسوره‌ای به جرم 0.8 kg با نیروی افقی 8 N از A به راه می‌افتد. تندیش در B چیست؟

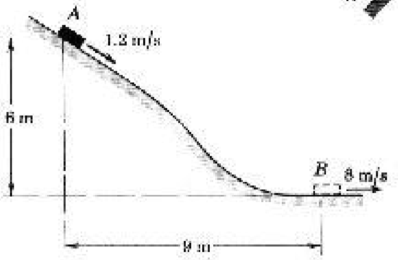
$U=\Delta T \quad 8(0.75)+0.8(9.81)(0.375)=(1/2)(0.8)(v^2-0)$

$v^2=22.36 \quad \underline{v=4.73 \text{ m/s}}$

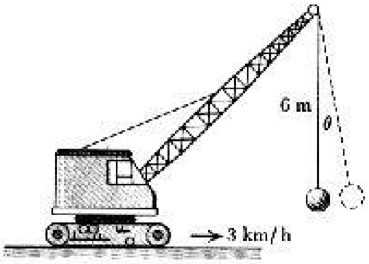




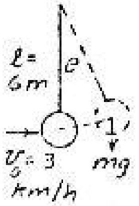
نگاره 3.92



نگاره 3.94



نگاره 3.93



3.93 - اگر خودروی نشان داده، ناگهان بایستد، بیشینه θ چه می‌شود؟

$U=\Delta T \quad -mgl(1-\cos\theta)=m(0-v_0^2)/2$

$\cos\theta=1-v_0^2/2gl=1-(3/3.6)^2/2\times9.81\times6)=$

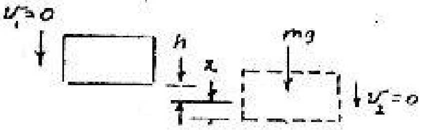
$=1-0.005899=0.9941 \quad \underline{\theta=6.23^\circ}$

3.94 - بسته‌ای به جرم 30 kg با تندی نوشته شده، از A به B می‌رود. کار انجام شده بر بسته چیست؟

$U=\Delta T \quad 30(9.81)(6)+U_f=(1/2)(30)(8^2-1.2^2)$

$U_f=938.4-1765.8=\underline{-827.4 \text{ J}}$

3.95 - نشان دهید که اگر جرم m از بلندی ناچیزی بر زمین افتد، نیروی دو برابر وزنش بر آن می‌نشیند.



$U=\Delta T$

$h=0 \quad v_2=v_1=0 \quad mgx-kx^2/2=0$

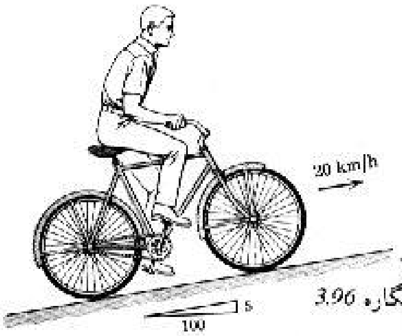
$\Rightarrow x=0 \ , \ x=2mg/k \quad F=kx=2mg$

3.96 - توان دوچرخه سوار 95 kg چیست؟

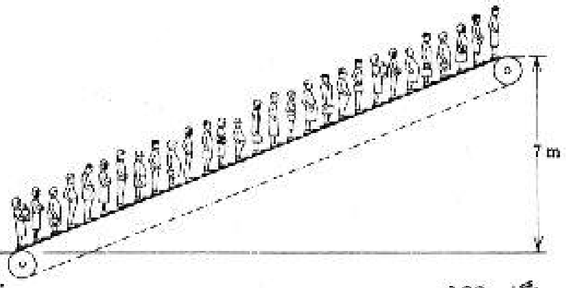
$P=W\dot{y}$ $\dot{y}=v\sin\theta$ $\theta=\tan^{-1}(0.05)=2.86^\circ$ $\sin\theta=0.0499$

$P=F.v=mg\sin\theta.v=95(9.81)(0.0499)(20/3.6)$

$P=258.36\ w$



نگاره 3.96

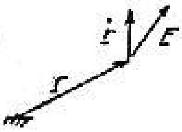


نگاره 3.98

3.97 توان نیروی $\vec{F}=40\hat{i}+20\hat{j}-36\hat{k}$ N بر $\vec{r}=8t\hat{i}+1.2t^2\hat{j}-0.5(t^3-1)\hat{k}$ از $t=0$ تا $t=4$ s چیست؟

$P=\underline{F}.\dot{\underline{r}}$ $P=(40\underline{i}-20\underline{j}-36\underline{k}).(8\underline{i}+2.4t\underline{j}-1.5t^2\underline{k})$

$P_{t=4s}=320-192=864=992\ w$ $P=0.992\ Kw$



3.98 - بازده مکانیکی موتور 3 kW برای راندن پلکانی با ظرفیت 30 نفر در دقیقه هر یک به جرم میانگین 65 kg چیست؟

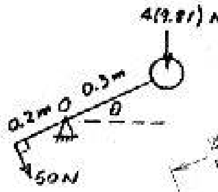
net power $=30(65)(9.81)/60=2229.5\ w$

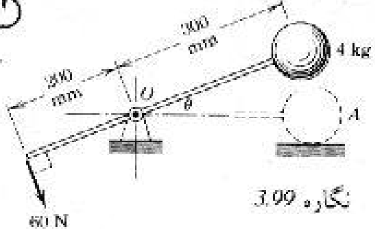
efficiency$=2.23/3=0.74$

3.99 - دستگاه از $\theta=0$ به راه می‌افتد. تندی گوی در $\theta=90^\circ$ چیست؟

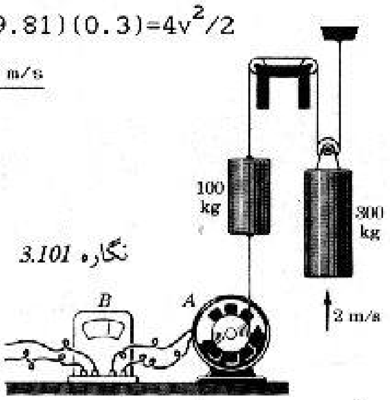
$U=\Delta T$ $60(0.2)(\pi/2)-4(9.81)(0.3)=4v^2/2$

$v^2=3.539\ m/s^2$ $v=1.881\ m/s$





نگاره 3.99



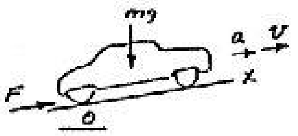
نگاره 3.101

3.100 - یک خودروی 1500 kg از پایین یک شیب 10% به راه می‌افتد و پس از 100 m به تندی 50 km/h می‌رسد. توان موتور چیست؟

$\theta=\tan^{-1}(0.1)$ $\sin\theta=0.0995$

www.collegeprozheh.ir

$\sum F_x = ma_x \quad v^2 = 2ax \quad F - mg\sin\theta = mv^2/2x$



$P = Fv = mgv\sin\theta + mv^3/2x =$
$= 1500(9.81)(50000)(0.0995)/3600 +$
$+ (1500/2\times100)(50000/3600)^3 = 20336 + 20094 = 40430$ W
$P = 40.4$ Kw

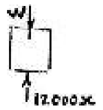
3.101 - بازده مکانیکی و الکتریکی، با توان الکتریکی 2.2 kW چیست؟

Power $= 300(9.81)(2) - 100(9.81)(4) =$
$= 1962$ J/s (W) $= 1.962$ Kw
$e = 1.962/2.20 = 0.892$

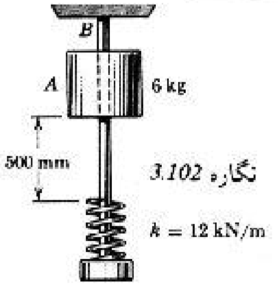
3.102 - ماسوره از آرایش نشان داده رها می‌شود. تندیش در فشردگی 50 mm فنر، چیست؟

$U = \Delta T$

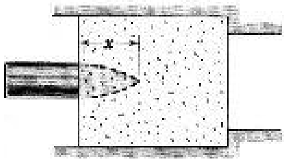
$6(9.81)(0.5+0.05) - 0.5(12000)(0.05^2) = 0.5(6)v^2$



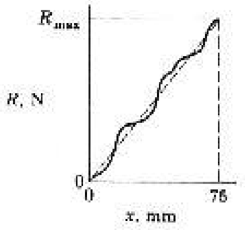
$v^2 = 5.791 \quad v = 2.41$ m/s



نگاره 3.102



نگاره 3.103



3.103 - گلوله 0.25 kg با تندی 600 m/s با مقاومتی به نمودار نشان داده، پس از 75 mm فرو رفتن در چوب، می‌ایستد. تندی گلوله در x=25 mm چیست؟

$x = 75$ mm $\quad U = \Delta T$, $(1/2)(0.075)R_{max} = (0.25)(600)^2/2$
$\Rightarrow R_{max} = 1.2$ MN
$x = 25$ mm $\Rightarrow R = (25)(1.2)/75 = 0.4$ MN
$U = \Delta T \qquad (1/2)(0.025)(0.4)10^6 = (1/2)(0.25)(600^2 - v^2)$
$v^2 = 320(10^3)$ (m/s)$^2 \quad v = 566$ m/s

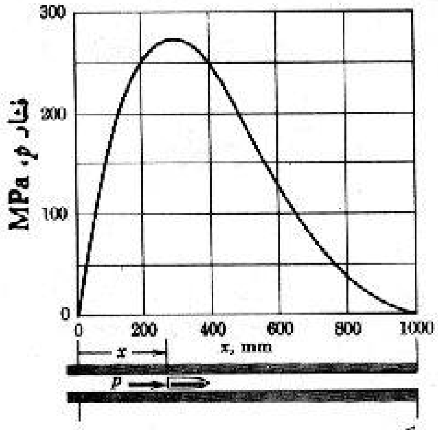
3.104 - تندی شلیک گلوله 14 g از تفنگی به کالیبر 7.5 mm با فشار نشان داده، چیست؟

$A = 140(10^6)$ N/m
bore area $= \pi(1.5\times10^{-3})^2/4 = 44.18(10^{-6})$ m^2
$U = 140(10^6)(44.18)(10^{-6}) = 6185$ J

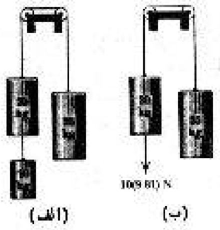
www.collegeprozheh.ir

$U=\Delta T \quad 6185=(0.014)v^2/2$

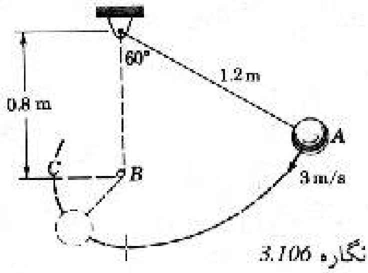
$v^2=0.8836(10^6)\ m^2/s^2 \quad \underline{v=940\ m/s}$



نگاره 3.104



نگاره 3.105



نگاره 3.106

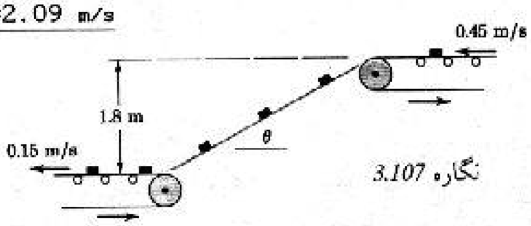
3.105 - تندی استوانه 25 kg را پس از آنکه استوانه 10 kg به اندازه 2 m پایین آید، چیست؟

(a) $[(20+10)(2)-25(2)](9.81)=(10+20+25)/2v^2$

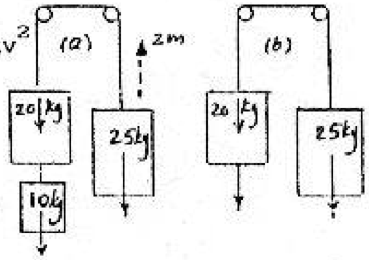
$\underline{v=1.89\ m/s}$

(b) $[(20+10)(2)-25(2)](9.81)=(20+25)/2v^2$

$\underline{v=2.09\ m/s}$



نگاره 3.107



3.106 - تندی گلوله به هنگام گذر از C چیست؟

$U=\Delta T \quad mg(0.8-1.2\cos 60^\circ)=m(v_c^2-3^2)/2$

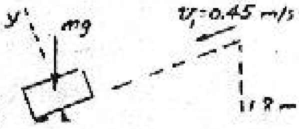
$9.81(0.20)=(v_c^2-9)/2 \quad \underline{v_c=3.59\ m/s}$

3.107 - با ضریب اصطکاک 0.3، شیب θ چه باشد تا بسته‌ها به تندی خواسته شده برسد؟

$\sum F_y=0 \quad N-mg\cos\theta=0 \quad N=mg\cos\theta \quad U=\Delta T$

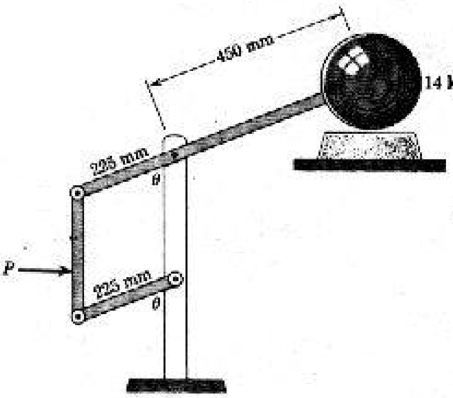
$(mg\sin\theta-0.3mg\cos\theta)(1.8/\sin\theta)$

$=(m/2)(0.15^2-0.45^2)$

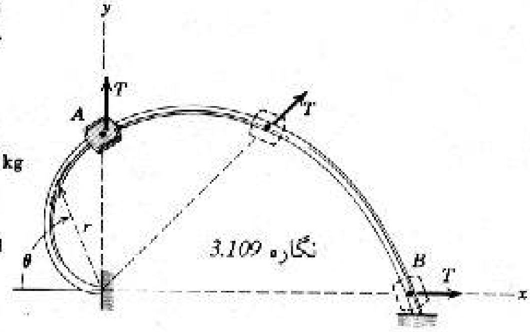


www.collegeprozheh.ir

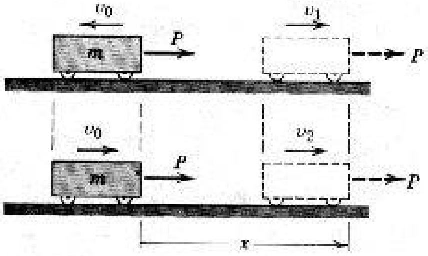
$\tan\theta=0.2985 \quad \underline{\theta=16.6^\circ}$



نگاره 3.108

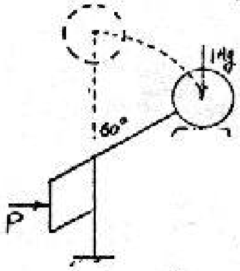


نگاره 3.109



نگاره 3.110

3.108 - با نیروی $P=700\ N$ و راه افتادن دستگاه از $\theta=60^\circ$، تندی گلوله در $\theta=0$ چیست؟



$U=\Delta T$

$700(0.225)\sin60^\circ-14(9.81)(0.45)[1-\cos60^\circ]=$

$=(1/2)(14)(v^2-0^2)$

$v^2=15.055 \quad \underline{v=3.88\ m/s}$

3.109 - ماسوره $0.5\ kg$ با نیروی $T=10\ N$ از A به راه می‌افتد. تندیش در B چیست؟

$W=mg(r_{\pi/2}-0)=0.5(9.81)(0.3)(\pi/2)=2.31\ J$

$T(r_\pi-r_{\pi/2})=10(0.3\pi-0.3\pi/2)=4.71\ J$

$U=\Delta T \quad 2.31+4.71=(1/2)0.5(v^2-0^2)$

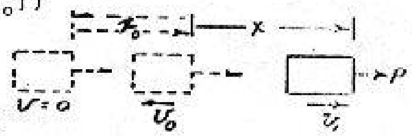
$v^2=28.10 \quad \underline{v=5.30\ m/s}$

3.110 - نشان دهید که اگر m با نیروی P به راه افتد، در زمانهای نابرابر، با تندی یکسان از x می‌گذرد. اگر اصطکاک باشد آیا باز هم چنین می‌شود؟

(a) $U=\Delta T \quad -px_o+px_o+px=(1/2)m(v_1^2-[-v_o^2])$

$px=(1/2)m(v_1^2-v_o^2)$

(b) $U=\Delta T \quad px=(1/2)m(v_2^2-v_o^2) \Rightarrow \underline{v_1=v_2}$



www.collegeprozheh.ir

3.111 - راننده‌ای می‌گوید با تندی 80 km/h و با ضریب اصطکاک 0.8، پس از 20 m ترمز گرفتن به تندی 40 km/h رسیده است. آیا راست می‌گوید؟

$U=\Delta T \quad 0.8mg(20)=(1/2)m[v^2-(40/3.6)^2]$

$v^2=0.8(9.81)(2)(20)+(40/3.6)^2$

$=437.4\ (m/s)^2 \quad v=20.9\ m/s$

$\Rightarrow v=20.9(3.6)=\underline{75.3<80\ km/h}$

3.112 - خودرویی با تندی 60 km/h بر یک شیب 10% با ضریب اصطکاک 0.7 ترمز می‌گیرد. کجا می‌ایستد؟

$\theta=\tan^{-1}(0.1)=5.71^\circ \quad \cos\theta=0.9950$

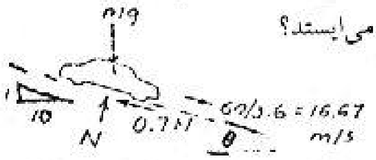
$\sin\theta=0.0995$

$N=mg\cos\theta=0.9950(9.81)m=9.76\ m$

$U=\Delta T \Rightarrow$

$-0.7(9.76m)s+9.81m(0.0995)s=-(m/2)(16.67)^2 \quad 5.86s=138.9$

$\underline{s=23.7\ m}$



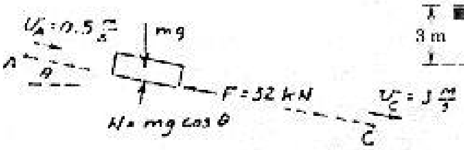
3.113 - گاری 68 Mg با تندی 0.5 m/s در A، از B با نیروی 32 kN ترمز می‌گیرد. ترمزها را در کجا رها کند تا تندیش در C، 3 m/s باشد؟

$\theta=\tan^{-1}(3/150)=1.1458^\circ$

$AC=150\ m \quad m=68\ Mg$

$U=\Delta T \quad 68(10^3)(9.81)(3)-32(10^3)x=(1/2)68(10^3)(3^2-0.5^2)$

$2001-32x=297.5 \quad \underline{x=53.2}$



نگاره 3.113

3.114 - یک خودروی 100 kg با نیروی T=1.5 kN از A به راه افتاده و در B، موتور را خاموش می‌کند. کجا می‌ایستد؟

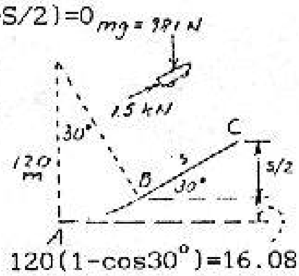
$AB=r\theta=120(\pi/6)=62.8\ m$

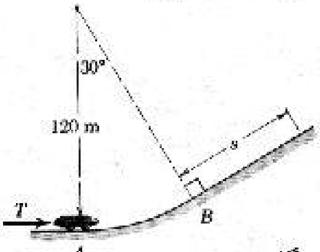
$U=\Delta T=0 \quad T_c=T_A=0$

$1500(62.8)-981(16.08+S/2)=0$

$S=2(94248-15771)/981$

$\underline{=160.0\ m}$





نگاره 3.114

www.collegeprozheh.ir

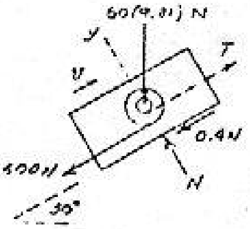
3.115 - پس از آنکه بسته 60 kg با نیروی P=600 N به اندازه 1.4 m بر شیبی به ضریب اصطکاک 0.4 بالا رود، تندیش چیست؟ قطر قرقره‌ها، 2 به 1 است.

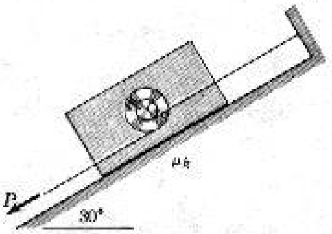
$\sum F_y=0 \quad N-60(9.81)\cos 30^\circ=0 \quad N=509.7$ N

$0.4N=203.9$ N

$U=\Delta T \quad 600(1.4)-60(9.81)\sin 30^\circ(1.4)$

$-203.9(1.4)=(1/2)65v^2 \quad \underline{v=2.18 \text{ m/s}}$





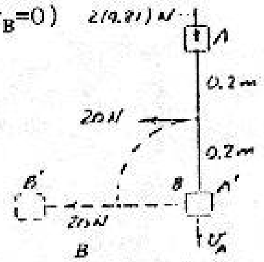
نگاره 3.115

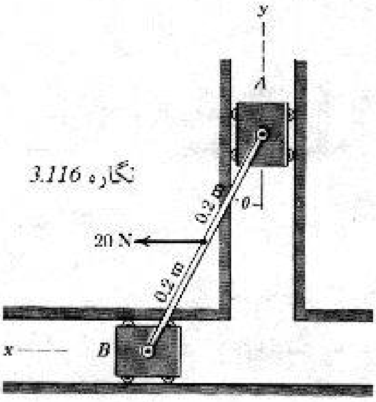
3.116 - بسته‌های 2 kg از θ=0 با نیروی نشان داده به راه می‌افتد. تندی A در θ=90° چیست؟

$U=\Delta T \quad T_{initial}=0 \quad T_{final}=(1/2)mv_A^2=v_A^2 \quad (v_B=0)$

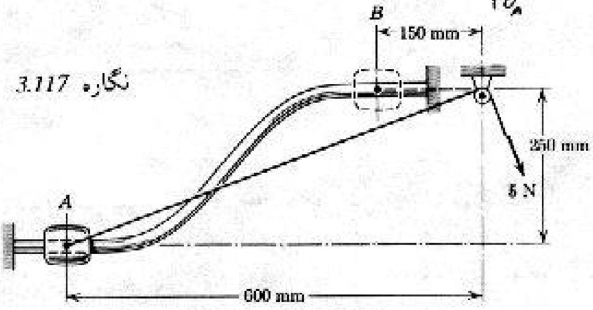
$U=20(0.2)+2(9.81)(0.4)=11.85$ J

$11.85=v_A^2 \quad \underline{v_A=3.44 \text{ m/s}}$





نگاره 3.116



نگاره 3.117

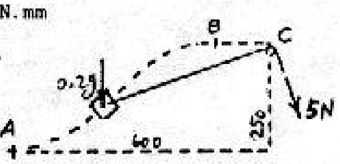
3.117 -اگر ماسوره‌ای به جرم 0.2 kg از A به راه افتد با چه تندی به B می‌رسد؟

$U=-0.2(9.81)(250)+5(487.5)=1947$ N.mm

$\overline{AC}=650$ mm $\quad \overline{AC}-\overline{BC}=162.5$ mm $\quad U=\Delta T \Rightarrow$

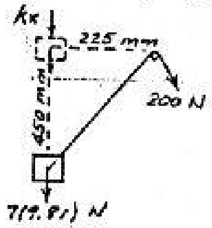
$1.947=(1/2)(0.2)(v^2-0^2)$

$\underline{v=4.41 \text{ m/s}}$



www.collegeprozheh.ir

3.118 - ماسوره 7 kg با نیروی F=200 N از A به راه می‌افتد. سختی فنر چه باشد تا 75 mm فشرده شود؟



$U=\Delta T \quad U=200[\sqrt{(0.450)^2+(0.225)^2}-0.225]-7(9.81)(0.450)-k(0.075)^2/2=$

$=55.6-30.9-0.00281k$

$\Delta T=0 \Rightarrow 0.00281k=55.6-30.9$

$k=8790$ N/m $\quad$ $k=8.79$ kN/m

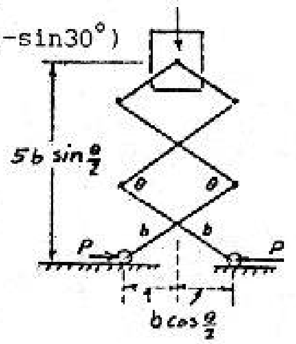
3.119 - نیروی P=1100 N از θ=60°، دستگاه را به راه می‌اندازد. تندی بسته در θ=180° چیست؟

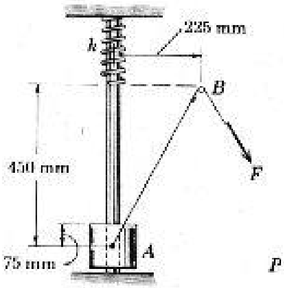
$U=\Delta T \quad U=2pb\cos(\theta/2)-W(5b)(1-\sin(\theta/2))=$

$=2(1100)(0.25)\cos30°-20(9.81)(1.25)(1-\sin30°)$

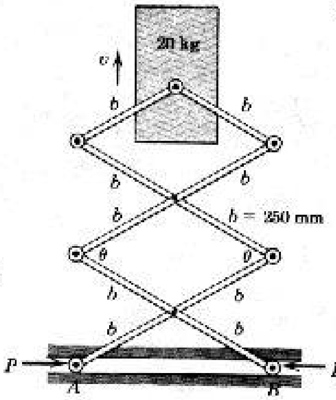
$=355.7$ N.m $\Rightarrow 355.7=(1/2)(20)v^2$

$v^2=35.57 \quad v=5.96$ m/s

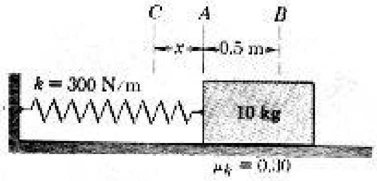




نگاره 3.118



نگاره 3.119



نگاره 3.120

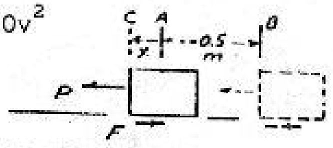
3.120 - بسته نشان‌داده از کشیدگی 0.5 m با ضریب اصطکاک 0.3 رها می‌شود. (a) تندی گذر از ترازگاه A و (b) بیشترین دورشدگی x چیست؟

$F=\mu_k N=0.3(10)(9.81)=29.43$ N

(a) B-A: $U=\Delta T \Rightarrow$

$(1/2)(300)(0.5)^2-29.43(0.5)=(1/2)10v^2$

$v^2=4.557$ (m/s)^2 $\quad v=2.13$ m/s



(b) A-C: $U=\Delta T \Rightarrow$

$-(1/2)(300)x^2-29.43x=0-(1/2)(10)(4.557)$

$x^2+0.1962x-0.1519=0$

$x=(-0.1962/2)\pm\sqrt{(0.1962)^2+4(0.1519)}\ /2=$

$=-0.0981\pm0.4019 \quad x=0.304$ m

www.collegeprozheh.ir

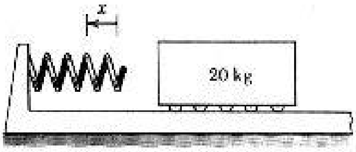
3.121 - تندی بسته چه باشد تا فنری با سختی نشان‌داده را 100 mm بفشرد؟

$$U=\Delta T \quad -1000\int_0^{.1}(20x^2+10x)dx=(1/2)(20)(0-v^2)$$

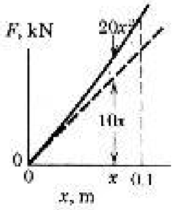
$$[(20/3)x^3+5x^2]_0^{.1}=10v^2$$

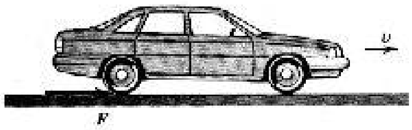
$$v^2=1000[0.05+(0.02/3)]=5.666\ (m/s)^2$$

$$v=2.38\ m/s$$



نگاره 3.121





نگاره 3.122

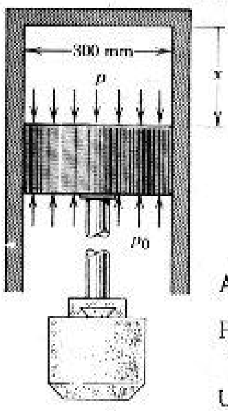
3.122 - خودرو با نیروی F و توان P در فاصله S از تندی v_1 به v_2 می‌رسد. v_2 چیست؟

$$P=Fv \quad F=ma \Rightarrow P=mav \quad a=P/mv \quad vdv=ads$$

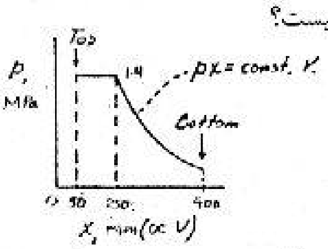
$$\Rightarrow mv^2dv=Pds \quad \int_{v_1}^{v_2}mv^2dv=\int_0^s Pds;\ m(v_2^3-v_1^3)/3=Ps$$

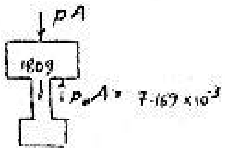
$$v_2=(3Ps/m+v_1^3)^{1/3}$$

3.123 - چکش 180 kg با فشار $P=1.4$ Mpa از $x=50$ تا 100 mm پایینتر می‌آید. پس از آن تا 250 mm پایینتر، فشار از دستور $PV=c$ به دست می‌آید. اگر فشار هوای بیرون، $P_0=0.1014$ MPa باشد، تندی چکش در پایان مسیر چیست؟



نگاره 3.123





$$A=\pi(300^2)/4=70685.8\ mm^2$$

$$P_1x_1=Px \quad P=P_1x_1/x=1.4(10^6)(0.100)/x=140000/x$$

$$U=180(0.300)(9.81)+1.4(10^6)(0.070686)(\frac{50}{1000})+$$

$$-0.1014\times10^6(0.07068)(\frac{300}{1000})+0.07068\int_{.05}^{.35}(140000/x)dx$$

$=529+4949-2150+19206=22588$ N.m

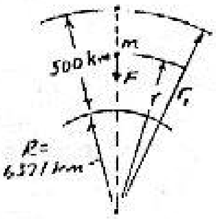
$U=\Delta T \quad 22588=(1/2)(180)(v^2-0) \quad v^2=251\ (m/s)^2$

$\underline{v=15.84\ m/s}$

3.124 - موتور موشکی بر فراز قطب شمال در بلندی 500 km خاموش می‌شود. تندی روبه‌پایین موشک در بلندی 100 km چیست؟ از $g=0.825\ m/s^2$ و شعاع زمین $R=6371\ km$ بهره گیرید.

$F=Gmm_e/r^2=gR^2m/r^2 \quad U=\Delta T \Rightarrow$

$\int_{r_1}^{r} F(-dr)=mv^2/2-0 \quad -\int_{r_1}^{r} gR^2m/r^2dr=mv^2/2$



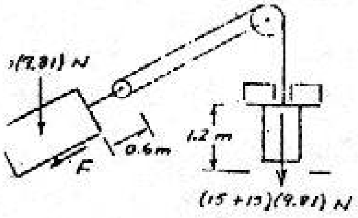
$-gR^2(-1/r)_{r_1}^{r}=v^2/2$

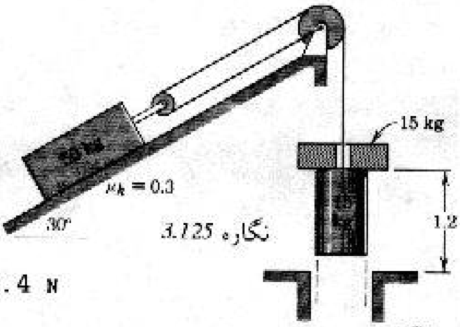
$gR^2(1/r-1/r_1)=v^2/2,\ v=R\sqrt{2g(1/r-1/r_1)}$

$v=6371\sqrt{\frac{2(9.825)}{1000}\left(\frac{1}{6371+500-100}-\frac{1}{6371+500}\right)}$ Km/s

$v=6371\sqrt{4.2237(10^{-8})}\ \underline{=1.309\ Km/s}$

3.125 - دستگاه از آرایش نشان‌داده رها می‌شود. بسته 50 kg تا کجا بالا می‌رود؟ استوانه 15 kg پایین می‌رود و طوقه در دهانه سوراخ می‌ماند.





نگاره 3.125

$F=\mu_kN=0.3(50)(9.81)\cos30^\circ=127.4$ N

$U=\Delta T$ First Interval:

$30(9.81)1.2-[50(9.81)0.5+127.4]1.2/2=$

$=30v^2/2+(50/2)(v/2)^2$

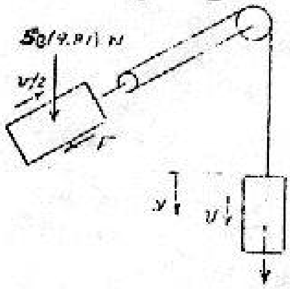
$v^2=6.096\ (m/s)^2,\ v=2.469\ m/s$

Second nterval:

$15(9.81)y-[50(9.81)0.5+127.4](y/2)=$

$=0-15(6.097)/2-(50/2)(6.097/4)$

$y=2.14$ m $\quad s=(1.2+2.14)/2=\underline{1.67}$ m



www.collegeprozheh.ir

3.126 - استوانه از $x=1\ m$ که فنر به سختی $450\ N/m$ آزاد است، رها می‌شود. (a) تندی بیشینه x آن چیست؟ (b) بیشینه x چیست؟

$F=k(x-1)=450(x-1) \quad U=\Delta T$

$$10(9.81)(x-1)-\int_1^x 450(x-1)dx=10v^2/2$$

$98.1(x-1)-450(x^2/2-x-1/2+1)=5v^2 \quad 5v^2=-225x^2+548.1x-323.1$

$5(dv/dx)^2=-450x+548.1=0$

v_{max}: $x=548.1/450=\underline{1.218\ m}$

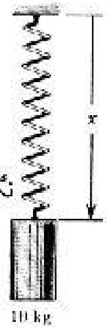
$\Rightarrow 5v^2=-225(1.218)^2+548.1(1.218)-323.1=10.693$

$v^2=2.139 \quad \underline{v=1.462\ m/s}$

$x_{max} \Rightarrow v=0 \Rightarrow 225x^2-548.1x+323.1=0$

$x^2-2.436x+1.436=0$

$x=1.218\pm\sqrt{5.934-5.744}/2=1.218\pm0.218=\underline{1.436\ m}$



نگاره 3.126

3.127 - بسته m از فشردگی x_0 رها می‌شود. توان فنر $P(x)$ چیست و بیشینه آن در کجا رخ می‌دهد؟

$$U=\Delta T \quad \int_{x_o}^{x} kxdx=mv^2/2, v^2=(k/m)(x_o^2-x^2) \quad P=Fv$$

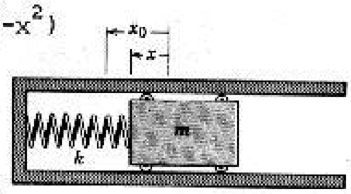
$P^2=F^2v^2=(kx)^2(k/m)(x_o^2-x^2) \quad P=kx\sqrt{(k/m)(x_o^2-x^2)}$

$(dP/dx)^2=(k^3/m)(2x_o^2x-4x^3)=0 \Rightarrow x=0 \ (P=0)$

$x=x_o/\sqrt{2} \Rightarrow$

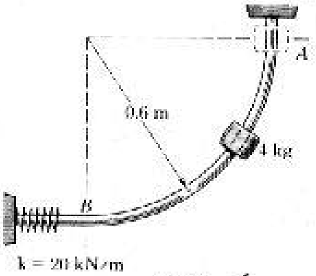
$P_{max}=k(x_o/\sqrt{2})(\sqrt{k/m})\sqrt{x_o^2-x_o^2/2}=(k/2)\sqrt{k/m}\ x_o^2$

$,\ x=x_o/\sqrt{2}$



نگاره 3.127

3.128 - ماسوره $4\ kg$ از A رها می‌شود. (a) تندیش در B چیست؟ (b) بیشترین فشردگی فنر چیست؟



نگاره 3.128

(a) $\Delta T+\Delta V_g=0 \quad mv^2/2-0-mgh=0$

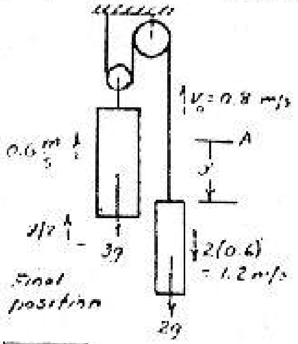
$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.6)}=\underline{3.43\ m/s}$

(b) $\Delta V_g+\Delta V_e=0$ since $\Delta T=0 \quad -mgh+kx^2/2=0$

$x^2=2mgh/k=2(4)(9.81)(0.6)/(20\times10^3)=$

$=0.235(10^{-2})\ m^2 \quad x=0.0485\ m \quad \underline{x=48.5\ mm}$

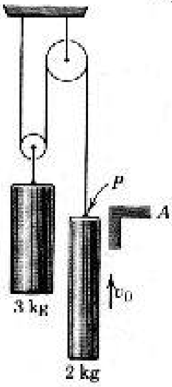
3.129 - نقطه P با تندی $0.8\ m/s$ از A می‌گذرد. P چه اندازه پایینتر رود تا تندی استوانه $3\ kg$ به $0.6\ m/s$ روبه‌بالا برسد؟



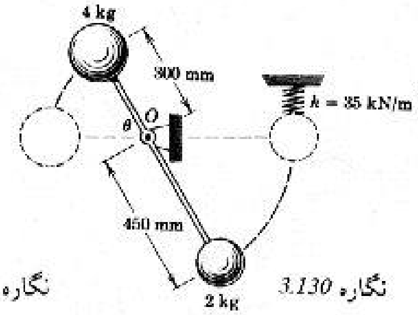
$U=\Delta T$

$2gy-3g(y/2)=(1/2)2(1.2^2-0.8^2)$
$+(1/2)3(0.6^2-0.4^2)$

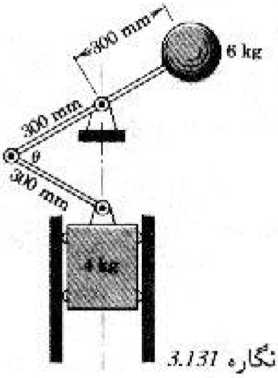
$y=(2/9.81)(0.8+0.3)$ $\underline{y=0.224\ m}$



نگاره 3.129



نگاره 3.130



نگاره 3.131

3.130 - دستگاه از $\theta=60^\circ$ رها می‌شود. (a) تندی گلوله $2\ kg$ پیش از برخورد با فنر چیست؟ (b) بیشینه فشردگی فنر چیست؟

(a) $\Delta T+\Delta V_g=0$

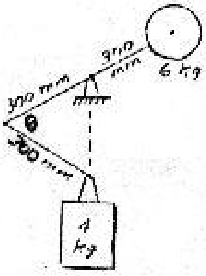
$(1/2)(2)v^2+(1/2)(4)(0.3v/0.45)^2+$
$+2(0.45)(9.81)\sin60^\circ-4(0.3)(9.81)\sin60^\circ=0$

$1.89v^2=2.54$ $\underline{v=1.16\ m/s}$

(b) $\Delta T=0$ $\Delta V_g+\Delta V_e=0$

$-2.54+(1/2)35000x^2=0$ $\underline{x=12.04\ mm}$

3.131 - دستگاه از $\theta=60^\circ$ رها می‌شود، تندی گلوله در $\theta=6^\circ$ چیست؟



$\Delta T+\Delta V_g=0$

$(\Delta V_g)_{6kg}=6(9.81)(0.3)(1-\sin30^\circ)=8.829\ J$

$(\Delta V_g)_{4kg}=-4(9.81)(2)(0.3)(1-\sin30^\circ)=-11.772\ J$

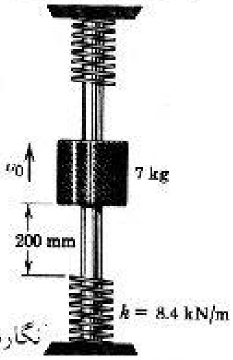
$8.829-11.772+(1/2)6v^2+0=0$

$v^2=0.981\ (m/s)^2$, $\underline{v=0.990\ m/s}$

www.collegeprozheh.ir

www.collegeprozheh.ir

3.132 - ماسوره در آرایش نشان‌داده، تندی $2.5 \; m/s$ رو به بالا دارد. فشردگی فنر پایین، پس از بازگشت ماسوره چیست؟



نگاره 3.132

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$

$\Delta V_e=0 \Rightarrow$

$-7(9.81)(0.2+x)+(1/2)8400x^2+$
$-(1/2)(7)(2.5)^2=0$

$4200x^2-68.67x-35.61=0$

$x=[-68.67)\pm\sqrt{68.67^2+4(4200)(35.61)}]/8400$
$=0.0842 \; m \;,\; -0.1006 \; m$

$\underline{x=100.6 \; mm}$

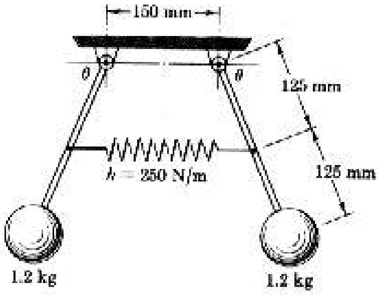
3.133 - دستگاه از $\theta=30^\circ$ رها می‌شود. تندی گلوله‌ها در $\theta=90^\circ$ که فنر آزاد می‌شود، چیست؟

$\Delta T=2(1/2)(1.2)(9.81)v^2=11.772v^2$

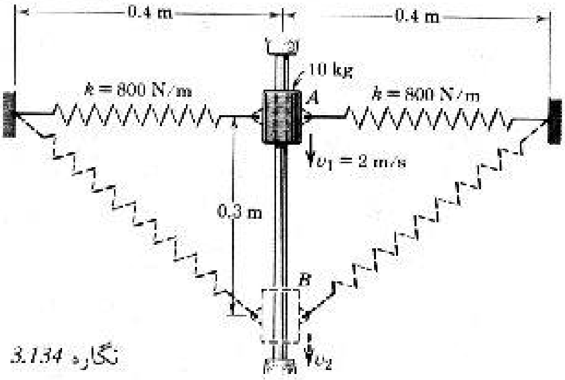
$\Delta V_e=-(1/2)(0.25)[2(0.125)\cos30^\circ]^2=-5.86$

$\Delta V_g=-2(1.2)(9.81)(0.25)(1-\sin30^\circ)=-2.943$

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v=864 \; m/s}$



نگاره 3.133



نگاره 3.134

3.134 - ماسوره از A با فشردگی فنرها به اندازه $0.1 \; m$ با تندی $v_1=2 \; m/s$ با پایین می‌رود. تندی آن در B چیست؟

$k=800 \; N/m \quad v_1=2 \; m/s$

$\delta_1=0.1 \; m \quad \delta_2=0.5-0.3=0.2 \; m \quad \Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$

$(1/2)10(v_2^2-2^2)-10(9.81)(0.3)+$

$+(2/2)800(0.2^2-0.1^2)=0$

$5v_2^2=20+29.43-24 \quad \underline{v_2=2.26 \; m/s}$

www.collegeprozheh.ir

3.135 - ماسوره 1.5 kg با تندی 2 m/s از A می‌گذرد و در B به 3 m/s می‌رسد. اگر طول آزاد فنر، 0.3 m و طول مسیر، 0.7 m باشد، کار نیروی اصطکاک و میانگین آن چیست؟

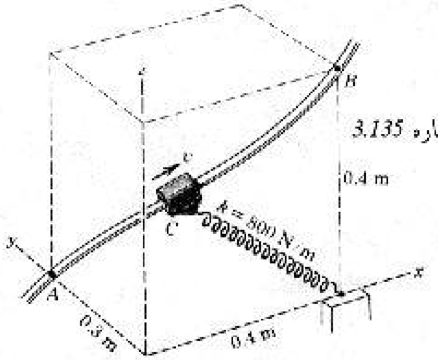
$\Delta T=(1/2)(1.5)(3^2-2^2)=3.75$ J

$\Delta V_e=(1/2)800[(0.4-0.3)^2-(0.5-0.3)^2]=-12$ J

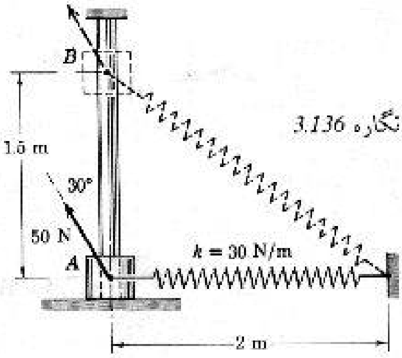
$\Delta V_g=1.5(9.81)(0.4)=5.89$ J $\quad U_f=U=\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T$

$U_f=3.75-12+5.89=\underline{-2.36\ \text{J}}$ $\quad |U_f|=F_{av}s$

$F_{av}=2.36/0.7=\underline{3.38\ \text{N}}$



نگاره 3.135



نگاره 3.136

3.136 - طول آزاد فنر، 1.5 m است و ماسوره از A به راه می‌افتد. تندیش در B چیست؟

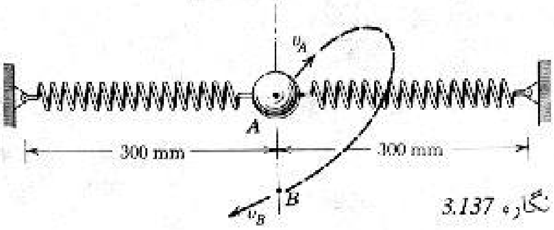
$U=\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T \quad U=50(1.5)\cos 30^\circ=64.95$ J

$\Delta T=(1/2)2v^2=v^2$

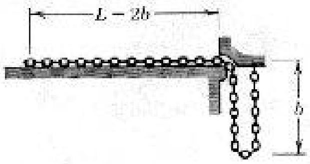
$\Delta V_e=(1/2)30[(\sqrt{2^2+1.5^2}-1.5)^2-(2-1.5)^2]=11.25$ J

$\Delta V_g=2(9.81)1,5=29.43$ J

$\Rightarrow 64.95=v^2+11.25+29.43 \quad v^2=24.27 \quad \underline{v=4.93\ \text{m/s}}$



نگاره 3.137



نگاره 3.138

3.137 - دو فنر به سختی 1800 N/m به گوی 1.5 kg و آزاد در A، بسته شده‌است. به گوی، تندی 2.5 m/s می‌دهیم و گوی، مسیر خط‌چین نشان‌داده را می‌پیماید و از B در 125 mm پایین‌تر می‌گذرد. تندی گوی در B چیست؟

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$

www.collegeprozheh.ir

$\Delta T=(1/2)(1.5)(v_B^2-2.5^2)=0.750v_B^2-4.7$ N.m

$\Delta V_e=2[(1/2)(1800)(0.025^2)=1.125$ N.m

$\Delta V_g=-(1.5)(9.81)(0.125)=-1.84$ N.m

$-1.84+1.25-4.7+0.75v_B^2=0$

$v_B^2=7.0533 \quad \underline{v_B=2.66 \text{ m/s}}$

3.138 - زنجیر از آرایش نشان داده رها می‌شود. تندی آخرین ذره افتان چیست؟

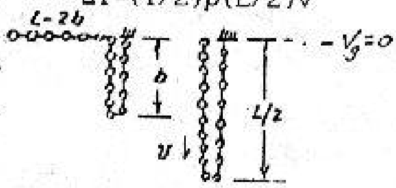
$V_g=-2\rho gb(b/2)=-\rho gb^2 \quad V_g=-2\rho g(L/2)(L/4)=-\rho gL^2/4$

$\Delta V_g=-\rho gL^2/4-(-\rho gb^2)=\rho g(b^2-L^2/4)$

$\Delta T=(1/2)\rho(L/2)v^2$

$\Delta T+\Delta V_g=0$

$\rho Lv^2/4+\rho g(b^2-L^2/4)=0 \quad v=\sqrt{g(L^2-4b^2)/L}$



3.139 - دستگاه از $\theta=0$ با فنرهای آزاد به سختی $3.5\ kN/m$ رها می‌شود. تندی وزنه در $\theta=30^\circ$ چیست؟

$\Delta V_g=-5(9.81)(0.15\tan30^\circ)=-4.25$ N.m

$x=150/\cos30^\circ-150=23$ mm $=0.023$ m

$\Delta V_e=2\{(1/2)(3500)(0.023)^2\}=1.8515$ N.m

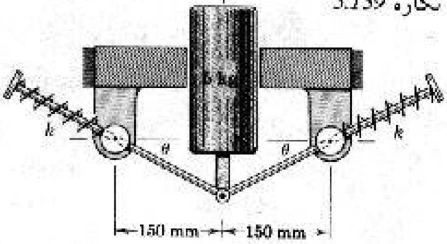
$\Delta T=(1/2)(5)v^2=2.54v^2$

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$

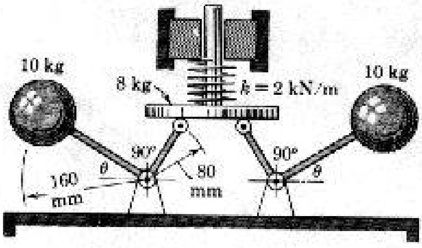
$2.5v^2-4.25+1.8515=0$

$v^2=0.9594 \quad v=0.98$ m/s

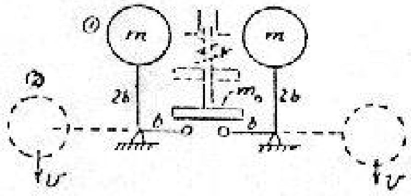
نگاره 3.139



3.140 - دستگاه از $\theta=90^\circ$ با فنرهای آزاد، رها می‌شود. تندی گلوله‌ها در $\theta=0$ چیست؟



نگاره 3.140



$m=10$ kg $\quad m_o=8$ kg $\quad b=0.080$ m

$k=2000$ N/m $\quad E_1=E_2$

www.collegeprozheh.ir

$\Rightarrow T_1+V_{e_1}+V_{g_1}=T_2+V_{e_2}+V_{g_2} \quad T_1=0, T_2=2(mv^2/2)=10v^2$

$V_{e_1}=0, V_{e_2}=kb^2/2=(1/2)(2000)(0.080)^2=6.40$ J

$V_{g_1}=2(mg)(2b)=4(10)(9.81)(0.080)=31.39$ J

$V_{g_2}=m_0gb=8(9.81)(0.080)=6.28$ J

$\Rightarrow 0+0+31.39=10v^2+6.40+6.28$

$v^2=1.871\ (m/s)^2 \quad \underline{v=1.368\ m/s}$

3.141 - دستگاه از $\theta=60^\circ$ با فنر آزاد، رها می‌شود، تندی گلوله در $\theta=90^\circ$ چیست؟

$\delta=0.375\sqrt{2}-0.375=0.155$ mm

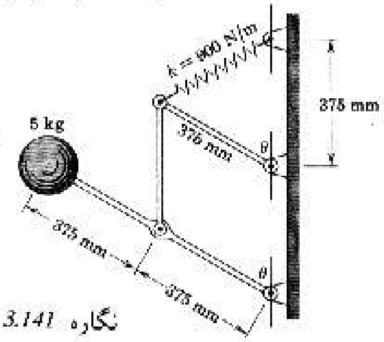
$\Delta V_e=(1/2)(900)(0.155)^2=10.81$ J

$\Delta V_g=-mg\Delta h=-5(9.81)(0.75)\cos60^\circ=-18.39$ J

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$

$(1/2)(5)v^2-18.39+10.81=0$

$v^2=3.0326 \quad , \quad \underline{v=1.74\ m/s}$



نگاره 3.141

3.142 - دستگاه از $\theta=180^\circ$ با فنر آزاد، رها می‌شود. کمینه θ چیست؟

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \quad \Delta T=0$

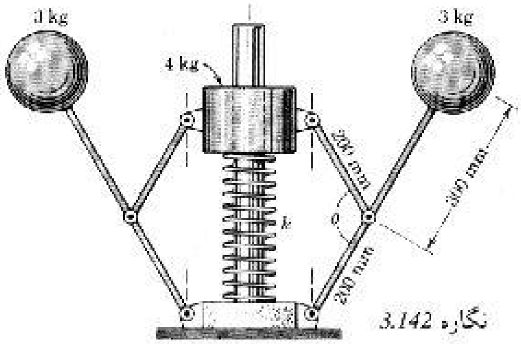
$\Delta V_e=(1/2)(900)[0.40(1-\sin(\theta/2))]^2=72(1-\sin(\theta/2))^2$ J

$\Delta V_g=-2(3)(9.81)(0.5)(1-\sin(\theta/2))+$

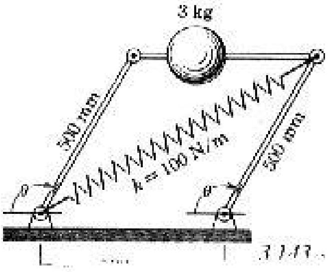
$-4(9.81)(0.4)(1-\sin(\theta/2))=-45.13(1-\sin(\theta/2))$

$\Rightarrow 72(1-\sin(\theta/2))^2=45.13(1-\sin(\theta/2))$

$\sin(\theta/2)=1-45.13/72=0.3733 \quad \underline{\theta=43.8^\circ}$



نگاره 3.142



www.collegeprozheh.ir

3.143 - دستگاه از $\theta=90^\circ$ با فنر آزاد، رها می‌شود، تندی گلوله در $\theta=135^\circ$ چیست؟

$\delta=\overline{AB}-0.5\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{2(0.5)^2-2(0.5)^2\cos\theta}=0.5\sqrt{2}\sqrt{1-\cos 135^\circ}$

$\delta=0.217$ m $\quad \Delta V_e=k\delta^2/2=(1/2)(100)(0.217)^2=2.35$ J

$\Delta V_g=-mg\Delta h=-3(9.81)(0.5)(1-\sin 135^\circ)=-4.31$ J

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \quad (1/2)3v^2-4.31+2.35=0$

$v^2=1.307 \quad \underline{v=1.143 \text{ m/s}}$

3.144 - اگر $v_1=90$ km/h باشد، v_2 چیست؟

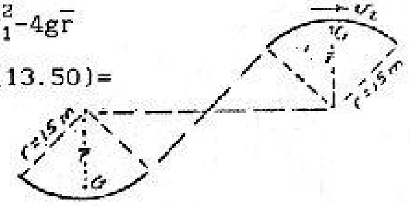
$\bar{r}=2\sqrt{2}r/\pi=2\sqrt{2}(15)/\pi=13.50$ m $\quad \Delta V_g+\Delta T=0$

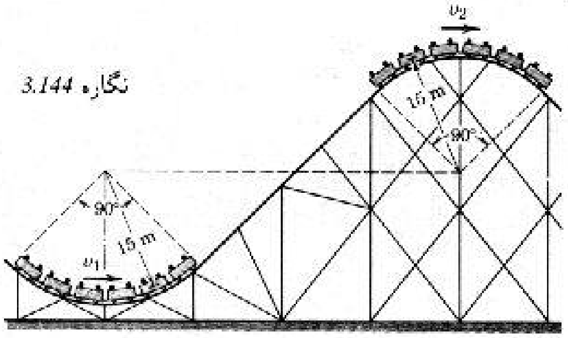
$(1/2)m(v_2^2-v_1^2)+mg(2\bar{r})=0 \quad v_2^2=v_1^2-4g\bar{r}$

$v_2^2=[90(1000)/3600]^2-4(9.81)(13.50)=$

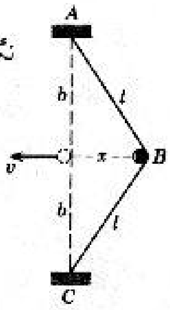
$=625-529.9=95.07$ (m/s)^2

$v_2=9.75$ m/s $\quad \underline{v_2=35.1 \text{ km/h}}$





نگاره 3.144



نگاره 3.145

3.145 - دستگاه از آرایش نشان‌داده، رها می‌شود. اگر طول آزاد کِش، $2b$ باشد، تندی گلوله در $x=0$ چیست؟

$\Delta V_e=0-2(1/2)k(l-b)^2=(-2/2)k(\sqrt{b^2+x^2}-b)^2$

Tension$=k(l-b) \quad K=T/[(l-b)/b]$

$\Rightarrow K=kb \quad \Delta V_e=(-K/b)(\sqrt{b^2+x^2}-b)^2$

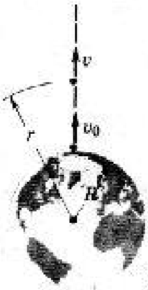
$\Delta V_e+\Delta T=0 \qquad (-K/b)(\sqrt{b^2+x^2}-b)^2+(1/2)mv^2=0,\ v=\sqrt{2K/mb}(\sqrt{b^2+x^2}-b)$

www.collegeprozheh.ir

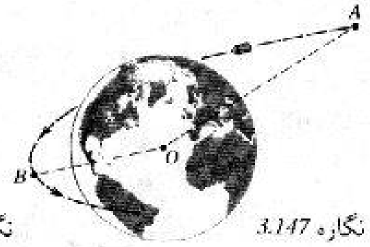
3.146 - کمترین تندی پرتاب چه باشد تا گلوله از گرانش زمین بگریزد؟

$\Delta V_e+\Delta T=0;\ (1/2)m(v^2-v_o^2)-mgR^2/r+mgR^2/R=0 \quad -v_o^2/2+gR$

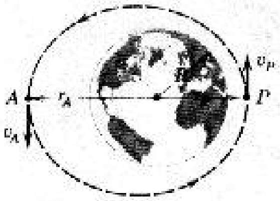
$v_o=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times9.81\times6371\times10^3}=11190$ m/s $=\underline{11.19 \text{ km/s}}$



نگاره 3.146



نگاره 3.147



نگاره 3.148

3.147 - ناویزی در بازگشت به زمین، با تندی 24000 km/h به A در 7000 km از میانه زمین می‌رسد. تندی ناویز در B با بلندی 6500 km چیست؟

$\Delta V_e+\Delta T=0 \quad V_g=-mgR^2/r \quad R=6371$ km

$g=9.825(36000^2/1000=127.3(10)^3$ km/h^2

$(1/2)m(v_B^2-[24000]^2)+$

$+127.3(10)^3(6371)^2m(-1/6500+1/7000)=0$

$v_B^2=2[288+56.8]10^6=690(10^6) \quad \underline{v_B=26300 \text{ km/h}}$

3.148 - وابستگی v_P و v_A چیست؟

$E=T_A+V_{g_A}=T_P+V_{g_P}$

$(1/2)mv_A^2-mgR^2/r_A=(1/2)mv_P^2-mgR^2/r_P$

$v_A^2=v_P^2-2gR^2(1/r_P-1/r_A),\ v_A=\sqrt{v_P^2-2gR^2(1/r_P-1/r_A)}$

3.149 - موشکی در A با تندی 13000 km/h پرتاب می‌شود. پس از 400 km تندیش در B به 12400 km/h می‌رسد. میانگین مقاومت هوا بر این موشک 22 kg چیست؟ R=6371 km.

$\Delta T=m(v_B^2-v_A^2)/2=(1/2)(12400^2 13000^2)/3.6^2=-587963$ J

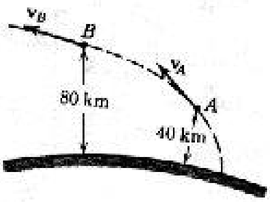
$\Delta V_g=-mgR^2(1/r_B-1/r_A)=-22\times9.81\times6371^2\times10^3\times$

$\times[(1/6451)-(1/6411)]=8472548$ J

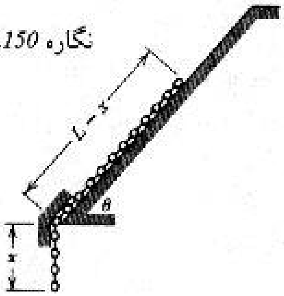
$U=-P(400\times10^3)=-400\times10^3P$ J

$U=\Delta T+\Delta V_g \ ; \ -400\times10^3P=-587963+8472548 \quad \underline{P=19.7 \text{ N}}$

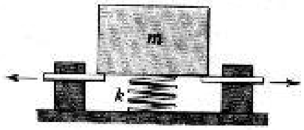
www.collegeprozheh.ir



نگاره 3.149

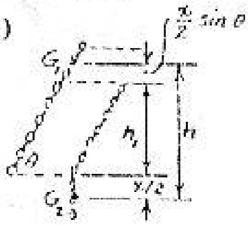


نگاره 3.150



نگاره 3.151

3.150 - زنجیر از $x=0$ رها می‌شود. $v(x)$ چیست؟



$h_1=(L-x)\sin\theta$

$h=(L-x)\sin\theta+x/2+(x/2)\sin\theta=L\sin\theta+(x/2)(1-\sin\theta)$

$U=\Delta T+\Delta V_g$

$\Delta V_g=-\rho gxh=-\rho g[Lx\sin\theta+(x^2/2)(1-\sin\theta)]$

$\Delta T=\rho Lv^2/2$

$\Rightarrow \quad -\rho g[Lx\sin\theta+(x^2/2)(1-\sin\theta)]+\rho Lv^2/2=0$

$v=\sqrt{2gx(\sin\theta+(x/2L)(1-\sin\theta))}$

3.151 - زبانه‌ها را بیرون می‌کشیم. تندی بیشینه m و نیروی گذران به کف و فشردگی فنر چیست؟

$U=\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0 \quad \Delta V_g=-mgx,\ \Delta V_e=kx^2/2,\ \Delta T=mv^2/2$

$\Rightarrow -mgx+kx^2/2+mv^2/2=0$

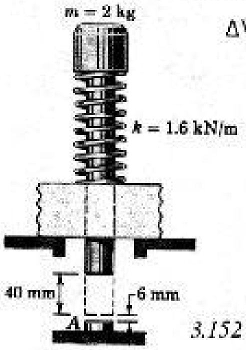
$v_{max}: \ (m/2)d^2v/dx^2=mg-kx=0,\ x=mg/k$

$\Rightarrow v^2=(2/m)[mg(mg/k)-(k/2)(mg/k)^2]=mg^2/k$

$v=g\sqrt{m/k} \quad \Delta T=0 \quad -mgx+kx^2/2=0,\ x=\delta=2mg/k$

$R=k\delta=2mg$

3.152 - سنبه را 40 mm از ترازگاهش بالا کشیده و رها می‌کنیم. تندی برخوردش با A چیست؟



نگاره 3.152

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \quad \Delta V_g=-Wh=-2\times9.81\times0.046=-0.90252 \text{ J}$

$\Delta V_e=k(x_2^2-x_1^2)/2=(1.6\times10^3)(6^2-40^2)/(2\times10^6)=$
$=-1.2512 \text{ J}$

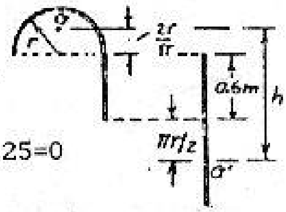
$\Delta T=mv^2/2=v^2$

$v^2-0.90252+1.2512=0$

$v^2=2.1537 \quad v=1.47 \text{ m/s}$

www.collegeprozheh.ir

3.153 - ریسمان از آرایش (a) رها می‌شود. تندی v در آرایش (b) چیست؟



$\Delta V_g+\Delta T=0$

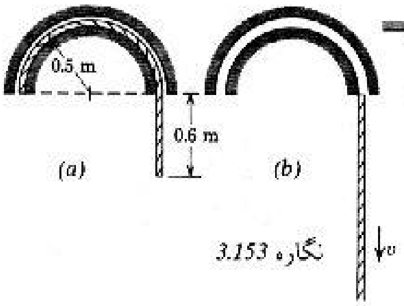
$\Delta V_g=-\rho g\pi rh=-\rho(9.81\pi\times0.5\times1.704)=-26.25\rho$

$\Delta T=(1/2)\rho(1.571+0.6)v^2=1.0855\rho v^2 \quad r=0.5 \text{ m}$

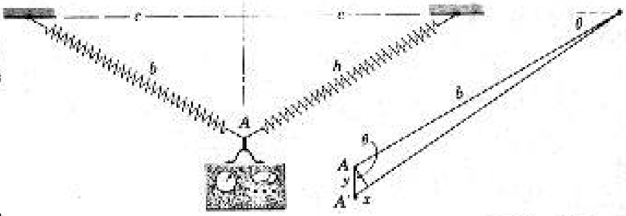
$2r/\pi=2(0.5)/\pi \quad \pi r=1.571 \text{ m}$

$h=0.318+0.6+0.785=1.704 \text{ m} \Rightarrow 1.0855v^2-26.25=0$

$v^2=24.19 \ (\text{m/s})^2 \quad \underline{v=4.92 \text{ m/s}}$



نگاره 3.153



نگاره 3.154

3.154 - دستگاه از آرایش نشان‌داده، با فنرهای آزاد رها می‌شود. اگر $x=y\sin\theta$ و $\theta=\cos^{-1}(\frac{c}{b})$ باشد. $\dot{y}(y)$ و y_{max} چیست؟

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \quad \Delta T=m\dot{y}^2/2 \quad \Delta V_g=-mgy$

$\Delta V_e=2\{kx^2/2\}=k(y\sin\theta)^2=$

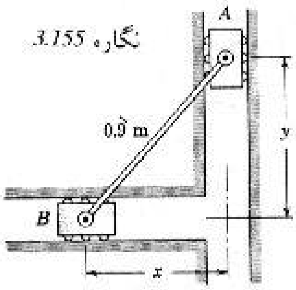
$=ky^2(1-\cos^2\theta)=ky^2(1-c^2/b^2)$

$m\dot{y}^2/2-mgy+ky^2(1-c^2/b^2)=0$

$\dot{y}=\sqrt{2y(g-ky(b^2-c^2)/mb^2)}$

$y_{max}=y \ , \ \dot{y}=0 \Rightarrow 2gy-(2ky^2/m)(1-c^2/b^2)=0$

$\underline{y_{max}=(mg/k)[b^2/(b^2-c^2)]}$



نگاره 3.155

3.155 - دستگاه از $x=y$ رها می‌شود. بیشینه تندی B چیست؟

$x^2+y^2=0.9^2 \quad x\dot{x}+y\dot{y}=0$

$v_A=-\dot{y}=\dot{x}x/y=xv_B/y, \Delta V_g+\Delta T=0; m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2$

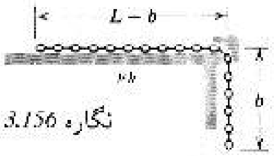
$+mg(y-0.9/\sqrt{2})=0$

$\dot{x}^2(1+x^2/y^2)=2(9.81)(0.9/\sqrt{2}-y)$

www.collegeprozheh.ir

$\Rightarrow y(1.8/\sqrt{2}-3y)=0, y=0.6/\sqrt{2}$ m

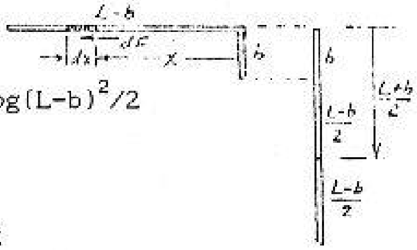
$\dot{x}^2=19.62\sqrt{2}/30 \quad v_{B_{max}}=\dot{x}=0.962$ m/s



نگاره 3.156

3.156 - دستگاه از آرایش نشان‌داده به‌راه‌می افتد. تندی زنجیر در پایان مسیر چیست؟

$\rho gb=\mu_k\rho g(L-b), b=\mu_k L/(1+\mu_k)$



$U=\Delta T+\Delta V_g \quad U=-\int dF.x=-\int_0^{L-b}\mu_k\rho gxdx=-\mu_k\rho g(L-b)^2/2$

$\Delta T=\rho Lv^2/2 \quad \Delta V_g=-\rho g(L-b)(L+b)/2$

$\Rightarrow -\mu_k\rho g(L-b)^2/2=\rho Lv^2/2-\rho g(L^2-b^2)/2$

$v^2=g(1-b/L)(L+b-\mu_k[L-b])$

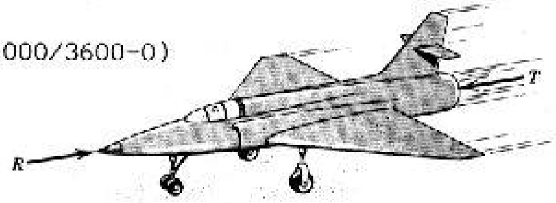
$v^2=gL/(1+\mu_k) \quad v=\sqrt{gL/(1+\mu_k)}$

3.157 - جنگنده 6450 kg با نیروی $T=48$ kN در 10 ثانیه به 250 km/h می‌رسد. میانگین نیروی اصطکاک R چیست؟

$\int\sum Fdt=m\Delta v$

$[48(10^3)-R]10=6450(250\text{x}1000/3600-0)$

$R=3208$ N $\quad R=3.21$ KN



نگاره 3.157

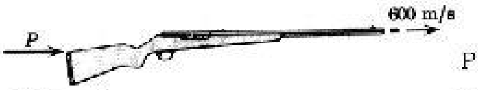
3.158 - شاتل 90 Mg با تندی 26000 km/h پیش می‌رود. پس از روشن کردن دو موتور هر یک به نیروی 26 kN کی به 26200 km/h می‌رسد؟

$\int\sum Fdt=m\Delta v$

$2(26)10^3t=90(10^3)(26200-26000)(1000/3600) \quad t=96.15$ sec

$t=1$ min 36 sec

3.159 - گلوله 60 gr پس از $3\text{x}10^{2}$ با تندی 600 m/s به دهانه لوله می‌رسد. نیروی پرتاب گلوله چیست؟



نگاره 3.159

$Pt=m\Delta v \quad P(3\text{x}10^{-3})=0.060(600)$

$P=12\text{x}10^3$ N $\quad P=12$ KN

3.160 - شش موشک هر یک به تکان 100 kN.s یکی پس از دیگری به فاصله 0.25 s روشن شده و 1.5 s روشن می‌ماند. اگر تندی این خودروی 3 Mg پس از 3 s به 150 m/s برسد، میانگین نیروی

www.collegeprozheh.ir

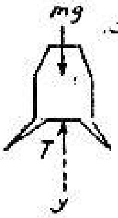
اصطکاک R چیست؟

$$\int\sum Fdt = m\Delta v$$

$$6(100000)-3R=3000(150-0)$$

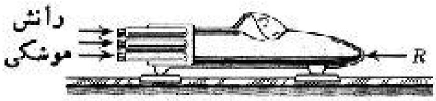
$$R=50000\ N = 50\ kN$$

3.161 - موتور ماه‌نشین 320 kg در 10 s تکان 24 kN.s به آن می‌دهد. اگر تندی ماه‌نشین در بلندی 180 m، 40 m/s باشد، کی به تندی فرود 2 m/s می‌رسد. در ماه $g=1.62\ m/s^2$ است.

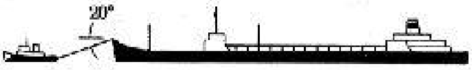


$$mg=320(1.62)=518\ N \quad T=24000/10=2400\ N$$

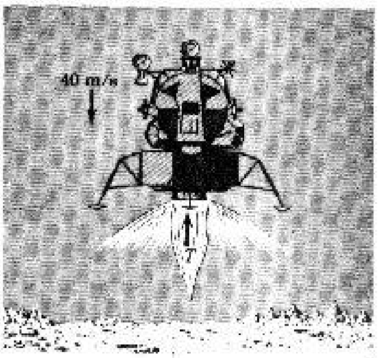
$$\int\sum F_y = m\Delta v_y \quad (518-2400)t=320(2-40) \quad t=6.46\ s$$



نگاره 3.160



نگاره 3.162



نگاره 3.161

3.162 - اگر کشش ریسمان 200 kN باشد، کی، تندی نفت‌کش 150×10^3 ton به تندی 1 گره می‌رسد؟

$$\int Fdt = m\Delta v$$

$$(50000\cos20^\circ)t = \frac{150,000\times2240}{32.2}\ \frac{1\times1.152}{1}\ \frac{44}{30}$$

$$46985t=17.63\times10^6 \quad t=375\ s \quad t=6.25\ min$$

3.163 - یک کشتی 15000 ton با تندی 10 گره، با نیروی 280 kN رانده می‌شود. اگر اصطکاک آب چنان باشد که می‌بینید، کی به تندی 12 گره می‌رسد؟

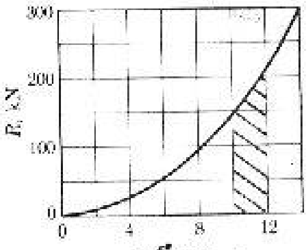
$$\Delta T = m(v^2-v_0^2)/2$$

$$=0.5\times15\times10^6(12^2-10^2)(1.852/3.6)^2$$

$$\Delta W = 280\times10^3(12-10)(1.852/3.6)t+$$

$$-350\times10^3(1.852/3.6)t$$

$$\Delta T=\Delta W \quad 87335518=108033t \quad t=808\ s$$



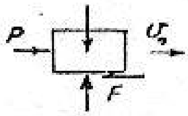
نگاره 3.163

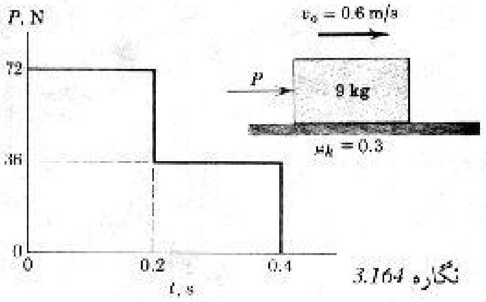
www.collegeprozheh.ir

3.164 - تندی بسته، پس از صفر شدن نیروی P، از 0.6 m/s به چه می‌رسد؟

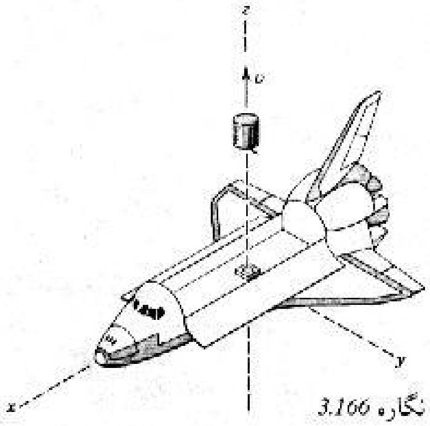
$$\int_0^t \sum F dt = m\Delta v_y \qquad F_R=-9(9.81)(0.3)=-26.487 \text{ N}$$

$$(72+36)(0.2)-26.487(0.4)=9(v-0.6) \qquad \underline{v=1.823 \text{ m/s}}$$





نگاره 3.164



نگاره 3.166

3.165 - کشتی 60000 ton در تندی 3 گره، با نیروی 18 MN ترمز می‌گیرد. کی به 3 گره می‌رسد؟

$$\int_0^t R dt = m\Delta v \qquad Rt=m\Delta v \qquad t=m\Delta v/R$$

$$t=\frac{60000(2240)}{32.2}\;\frac{[3-(-5)](1.152)(44/30)}{4(10^6)}=\underline{14.1 \text{ sec}}$$

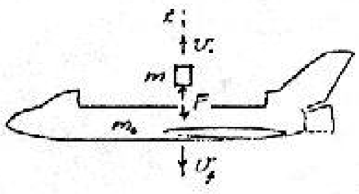
3.166 - شاتل 90 Mg ماهواره 800 kg را در 4 ثانیه به تندی 0.3 m/s می‌رساند و رها می‌کند. تندی شاتل و میانگین نیروی پرتاب چیست؟

1) $v_1+v_f=0.3$ m/s $\quad \int F dt = m v_1$

$-\int F dt = m_f(-v_f) \Rightarrow m v_1 = m_o v_f$

2) $800 v_1 = 90000 v_f$

$v_f=0.3-90000v_f/800 \qquad \underline{v_f=0.00264 \text{ m/s}}$



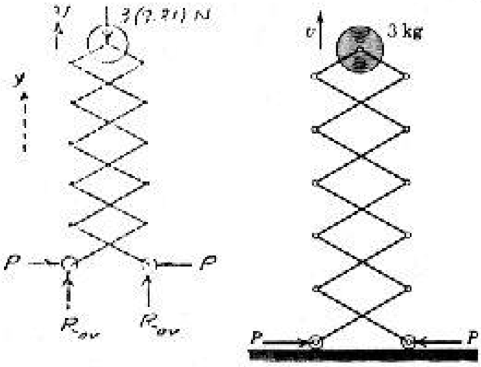
$$\Rightarrow F_{av}\int_0^4 dt=90000(0.00264) \qquad F_{av}=90(2.64)/4=\underline{59.5 \text{ N}}$$

3.167 - اگر تندی گلوله در 2 ثانیه از 2 m/s به 4 m/s برسد، نیروی میانگین هر یک از دو غلتک چیست؟

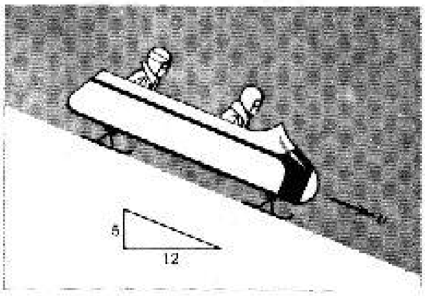
www.collegeprozheh.ir

$v_1=2$ m/s $v_2=4$ m/s $\Delta t=2$ s $\int_0^2 \sum F_y dt = m\Delta v_y$

$[2R_{av}-3(9.81)]2=3(4-2)$ $\underline{R_{av}=16.22\text{ N}}$



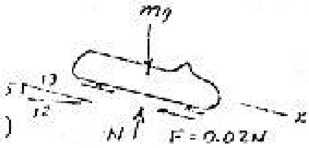
نگاره 3.167



نگاره 3.168

3.168 - اگر نیروی اصطکاک، 2% نیروی عمودی باشد، کی سورتمه به 100 km/h می‌رسد؟

$\sum F_y=0; N=mg(12/13)$ $\int_0^t \sum F_x dt = m\Delta v_x$



$[5mg/13-0.02mg(12/13)]t=m(100\times1000/3600-0)$

$(9.81/13)(5-0.02(12))t=27.78$ $\underline{t=7.73\text{ s}}$

3.169 - یک قطار 1600 Mg با نیروی 270 kN و اصطکاک 50 N برای هر Mg در سربالایی 1% کی از 32 km/h به 48 km/h می‌رسد؟

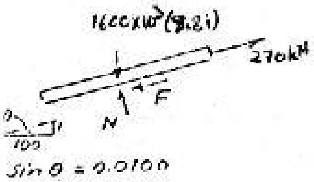
$\int \sum F dt = m\Delta v$

$[270000-50(1600)-1600000(9.81)(0.1)]t=$

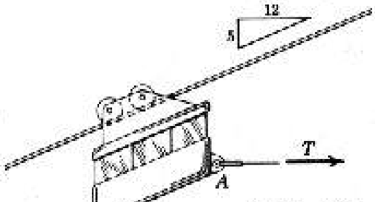
$=1600000(48-32)/3.6$

$33040t=7111111.1$ $t=215.23$ s

$\underline{t=3\text{ min }58\text{ s}}$



3.170 - اتاقک با تندی 4 m/s به‌بالا کشیده‌می‌شود. اگر ریسمان پاره شود، کی به تندی 8 m/s روبه‌پایین می‌رسد؟

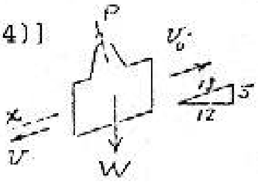


نگاره 3.170

$\int \sum F_x dt = m\Delta v_x$

$m(9.81)(5/13)=m[8-(-4)]$

$\underline{t=3.18\text{ s}}$

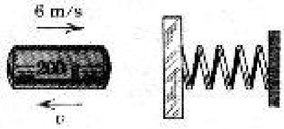


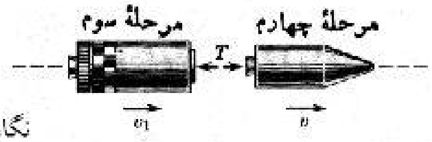
www.collegeprozheh.ir

3.171 - نیروی برخورد چنان است که می‌بینید. تندی بازتاب چیست؟

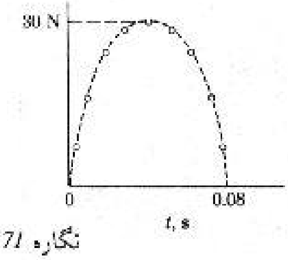
$$\int_0^t \sum F dt = m\Delta v \quad a=30 \text{ N} \quad b=0.04 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \pi(30)(0.04)/2 = 0.20(v-(-6)) \quad \underline{v=3.42 \text{ m/s}}$$

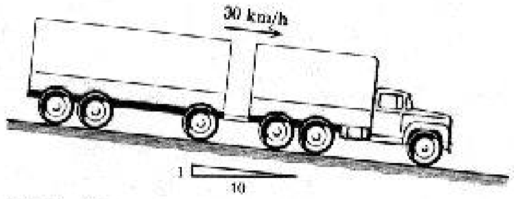




نگاره *3.173*



نگاره *3.171*



نگاره *3.174*

3.172 - تکان ذره m با نیروی پیشران P و نیروی اصطکاک $R=kv^2$، برای رسیدن به تندی بیشینه چیست؟

$$I=m(v-0)=mv \quad P=R \Rightarrow P=kv^2 \quad v=\sqrt{P/k} \quad I=m\sqrt{P/k}$$

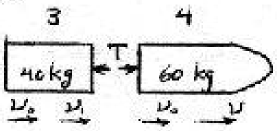
3.173 - مرحله سوم و چهارم با تندی *15000 km/h* حرکت می‌کند که موشک چهارم آتش شده و در *0.5 s* با تندی *10 m/s* بیشتر، از موشک سوم جدا می‌شود. اگر جرم موشک سوم و چهارم، *40 kg* و *60 kg* باشند، میانگین T چیست؟

$$\int \sum F dt = \Delta G \quad -T(0.5)=40(v_1-v_o) \quad T(0.5)=60(v-v_o)$$

$$v_1-v_o=-T(0.5/40) \quad v-v_o=T(0.5/60)$$

$$v-v_1=0.5T(1/60+1/40)$$

$$v-v_1=10 \text{ m/s} \Rightarrow T=10(2)/(1/60+1/40)=\underline{480 \text{ N}}$$



3.174 - ترمز اسب *10 Mg* و گاری *7.5 Mg* از کمرشکن نشان‌داده، نیروی یکسان پدید می‌آورد. اگر پس از 5 ثانیه ترمزگیری، تندی کمرشکن به صفر برسد، میانگین نیروی بین آن دو چیست؟

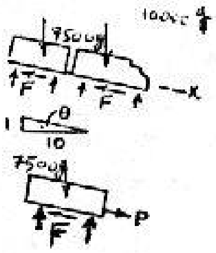
$$\theta=\tan^{-1}(0.1)=5.71^\circ \quad \sin\theta=0.0995$$

$$\int \sum F_x dt = m\Delta v_x$$

$$[17500(9.81)(0.0995)-2F]5=17500[0-(30/3.6)]$$

$$F=23124.2 \text{ N}$$

$$[P-23124.2+7500(9.81)(0.0995)]5=$$
$$=7500[0-(30/3.6)] \quad \underline{P=3303.5 \text{ N}}$$



www.collegeprozheh.ir

3.175 - اندازه حرکت خطی ذره‌ای با جایگاه $\vec{r}=3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ m، $\vec{G}=-3\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ kg.m/s است. اندازه حرکت زاویه‌ای آن چیست؟

$$\underline{H}_o=\underline{r}\times\underline{G}=(3\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k})(-3\underline{i}-2\underline{j}+3\underline{k})=6\underline{i}+6\underline{k}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

$$H_o=\sqrt{6^2+6^2}=8.49\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

3.176 - بر یک ذره 4 kg با تندی 10 m/s، نیروی نشان‌داده می‌نشیند. تندی ذره در (a) $t=0.6$ s و (b) $t=0.9$ s چیست؟

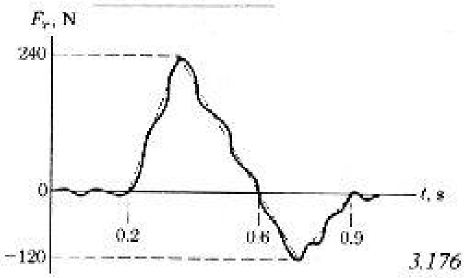
$$\int\sum F_x dt=m\Delta v_x$$

(a) $(0.6-0.2)(240/2)=4(v_{0.6}-[-10])$

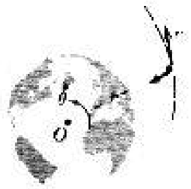
$48=4(v_{0.6}+10)$ $\quad v_{0.6}=2$ m/s

(b) $48-(0.9-0.6)(120/2)=4(v_{0.9}-[-10])$

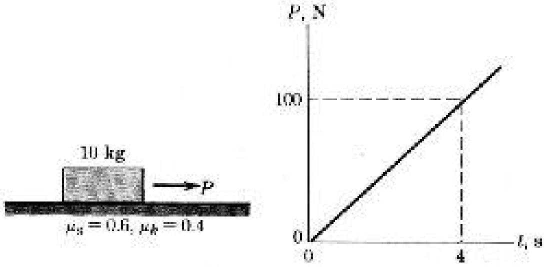
$v_{0.9}=-2.5$ m/s



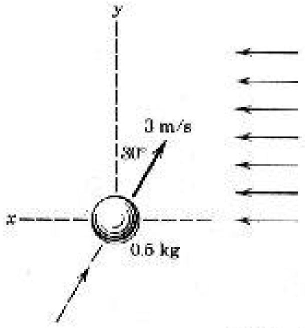
نگاره 3.176



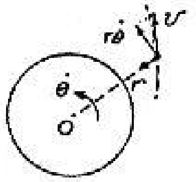
نگاره 3.177



نگاره 3.178



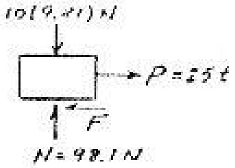
نگاره 3.179



3.177 - نشان دهید که $r^2\dot{\theta}$ برای ماهواره بی‌موتور، ثابت می‌ماند.

$\sum M_o=\dot{H}_o$ $\quad 0=d(mr\dot{\theta}xr)/dt$ $\quad d(r^2\dot{\theta})/dt=0$

$\Rightarrow r^2\dot{\theta}=\text{const.}$



3.178 - تندی بسته با نیروی نشان داده، پس از $t=4$ s چیست؟

$F_s=\mu_s N=0.6(98.1)=58.9$ N

$F_k=\mu_k N=0.4(98.1)=39.2$ N $\quad P=F_s$

$25t=58.9 \quad t=2.35\ s \quad \int\sum F dt=m\Delta v$

$\int_{2.35}^{4}(25t-39.2)dt=10(v-0) \quad 25t^2/2-39.2t]_{2.35}^{4}=10v$

$10v=66.1 \quad \underline{v=6.61\ m/s}$

3.179 - اگر نیروی باد، 0.6 N باشد، کی گلوله دوباره به y می‌خورد؟

$\int\sum F_x dt=m\Delta v_x \quad 0.6t=0.5(v_x+3\sin 30^\circ)$

$v_x=1.2t-3/2\ m/s \quad v_x=dx/dt$

$x=\int_0^t v_x dt=0.6t^2-1.5t \quad t=0 \quad x=0 \quad t=1.5/0.6=\underline{2.5\ s}$

3.180 - یک ذره 4 kg با دستور $\vec{r}=3t^2\hat{i}-2t\hat{j}-3t\hat{k}$ در t=3 s، کجاست و اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور نیروهایش چیست؟

$\underline{r}=3t^2\underline{i}-2t\underline{j}-3t\underline{k} \quad m=4\ kg \quad \underline{v}=\dot{\underline{r}}=6t\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k}\ m/s$

$\underline{G}=m\underline{v}=4(6t\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k})\ N.s$

$\underline{H}=\underline{r}\times\underline{G}=(3t^2\underline{i}-2t\underline{j}-3t\underline{k})\times 4(6t\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k})=$

$=12t^2(-3\underline{j}+2\underline{k})\ N.m.s$

$\underline{M}=\dot{\underline{H}}=24t(-3\underline{j}+2\underline{k})\ N.m \quad t=3\ s \quad \underline{H}=108(-3\underline{j}+2\underline{k})\ N.m.s$

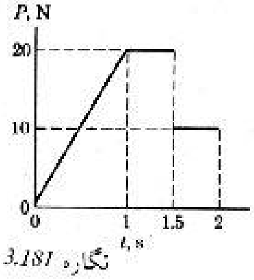
$H=108\sqrt{3^2+2^2}=\underline{389\ N.m.s} \quad M=72\sqrt{3^2+2^2}=\underline{260\ N.m}$

3.181 - یک ذره 10 kg با تندی 3 m/s پیش می‌رود و نیروی P، عمود بر راستای تندیش بر آن می‌نشیند. تندی آن در t=2 s و زاویه‌اش با P چیست؟

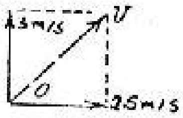
$\int_0^t \sum F_x dt=m(v_{2x}-v_{1x}) \quad \int_0^1 20t dt+\int_1^{1.5}20dt+\int_{1.5}^{2}10dt$

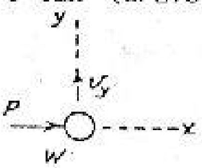
$25=10(v_{2x}-0) \quad v_{2x}=2.5\ m/s$

$v=\sqrt{2.5^2+3^2}=\underline{3.9\ m/s} \quad \theta=\tan^{-1}(3/2.5)=\underline{50.2^\circ}$



نگاره 3.181



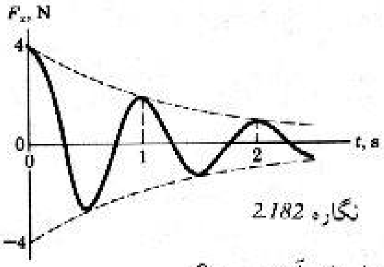


www.collegeprozheh.ir

3.182 - یک ذره 0.5 kg با نیروی $F_x=4e^{-t}\cos 2\pi t$ می‌لرزد. اگر تندی آن در $t=0$، 1.2 m/s باشد، در $t=2$ s چیست؟

$$\int\sum F_x dt=\int_0^2 4e^{-t}\cos(2\pi t)dt=$$

$$=4e^{-t}(-\cos(2\pi t)+2\pi\sin(2\pi t))/(1+4\pi^2)\Big]_0^2$$



نگاره 2.182

$$=0.0988[1-e^{-2}]=0.0854 \text{ m/s}$$

$$\sum F_x=m\Delta v_x;\ 0.0854=0.5[v_x-(-1.2)]$$

$$v_x=-1.03 \text{ m/s}$$

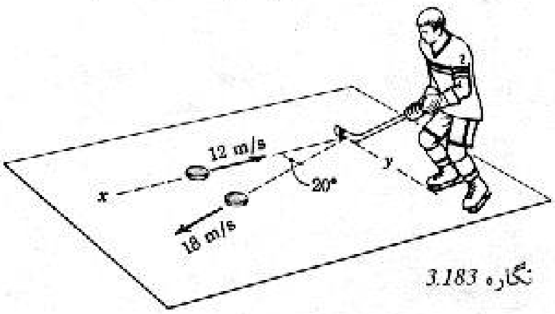
3.183 - اگر چوگان باز در 0.04s، گوی را برگرداند، نیرو و راستای آن چیست؟

$$\int \underline{F}dt=\underline{F}t=m\Delta\underline{v}$$

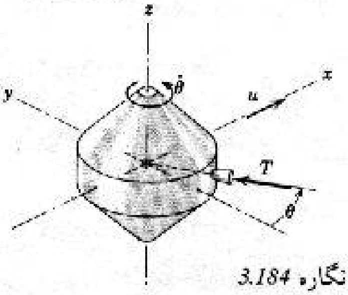
$$\underline{F}=(0.20/0.04)(18\cos 20^\circ\underline{i}+18\sin 20^\circ\underline{j}-(-12\underline{i}))$$

$$=30(4.819\underline{i}+1.026\underline{j}) \text{ N} \quad F=30\sqrt{4.819^2+1.026^2}=147.8 \text{ N}$$

$$\beta=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(1.026/4.819)=12.62^\circ$$



نگاره 3.183



نگاره 3.184

3.184 - $T=600$ N از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ روشن می‌ماند. با $u=30000$ km/h و $\dot\theta=\frac{\pi}{10}$ rad/s، تندی ناو بز 260 kg در سوی x چه می‌شود؟

$$T_y=600\cos\theta;\ \dot\theta=\pi/10 \text{ rad/s} \Rightarrow dt=(10/\pi)d\theta$$

$$\int\sum F_y dt=m\Delta v_y \quad \int_0^{\pi/2} 600\cos\theta(10/\pi d\theta)=260(v_y-0)$$

$$600/\pi\sin\theta\Big]_0^{\pi/2}=260v_y \quad v_y=6000/260\pi=7.35 \text{ m/s}$$

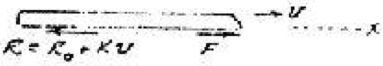
3.185 - خودرویی به جرم m با نیروی F و اصطکاک $R=R_0+kv$ کی به تندی v می‌رسد؟

www.collegeprozheh.ir

$R=R_o+kv \quad \sum F dt = m dv, \ (F-R_o-kv)dt = m dv$

$\int_0^t dt = \int_0^v m dv/(F-R_o-kv) \quad t=-(m/k)\ln(F-R_o-kv)]_0^v$

$t=(m/k)\ln(F-R_o)/(F-R_o-kv)$

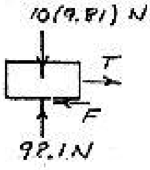


3.186 - بسته با نیروی T به‌راه‌می‌افتد. تندی بیشینه و زمان ایستادن آن چیست؟

$T=F=\mu W=0.5(98.1)=49.05$ N $\quad t_1=49.05(4)/100=1.96$ s

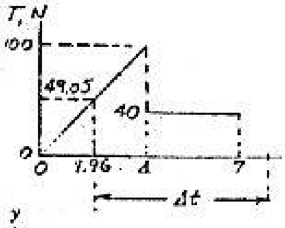
$\int\sum F dt = m\Delta v \quad (100-49.05)(4-1.96)/2=10(v-0)$

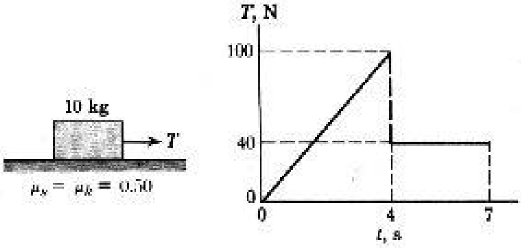
$v_{max}=5.19$ m/s



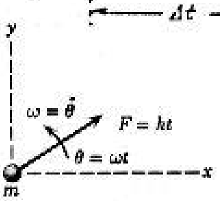
$\Delta V=0 \Rightarrow (100+49.05)(4-1.96)/2+40(7-4)-49.05\Delta T=0$

$\Delta T=5.54$ s





نگاره 3.186

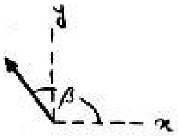


نگاره 3.187

3.187 - اندازه تندی ذره، پس از نیم‌بار چرخش میدان نیرو، و زاویه آن با x چیست؟

$\int_0^t \sum F_x dt = m\Delta v_x \quad \int_0^{\pi/\omega} kt\cos\omega t\, dt = m(v_x-0)$

$(k/\omega^2)[\cos\omega t+\omega t\sin\omega t]_0^{\pi/\omega} = mv_y$

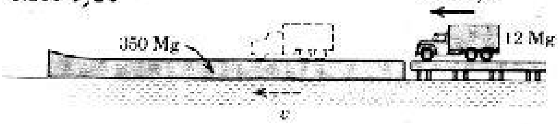


$v_y=k\pi/m\omega^2 \quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=(k/m\omega^2)\sqrt{4+\pi^2}$

$\beta=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(-\pi/2)=122.5°$

3.188 - تندی شناور، پس از ترمز کامیون بر آن چیست؟

نگاره 3.188



$\Delta G=0$

$12(20)+0=(350+12)v$

$v=0.663$ km/h

www.collegeprozheh.ir

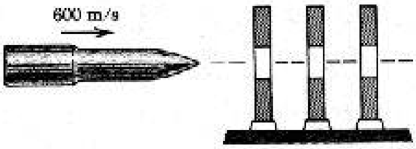
3.189 - گلوله 140 gr سه حلقه را برمی‌چیند. تندی آنها و افت انرژی چیست؟

$\Delta G=0 \quad (0.140)(600)-[0.140+3\times0.100]v=0$

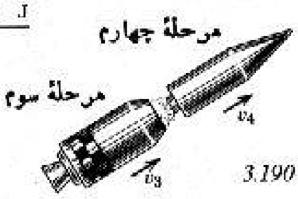
$v=190.9$ m/s

$|\Delta E|=(1/2)(0.140)600^2-(1/2)(0.140+0.300)190.9^2=$

$=25.2(10)^3-8.018(10^3)=17.18(10^3)$ J



نگاره 3.189



نگاره 3.190

3.190 - مرحله سوم 400 kg و چهارم 20 kg با تندی 18000 km/h پیش می‌رود. پس از جدایی، تندی موشک چهارم، به 18060 km/h می‌رسد. تندی مرحله سوم چیست؟

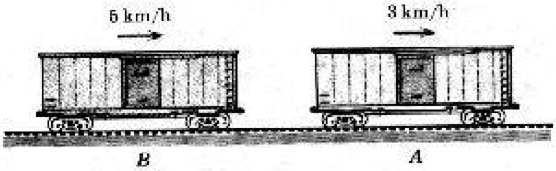
$\Delta G=0 \quad 600(18000)-[400v_3+200(1800)]=0$

$\Rightarrow v_3=17970$ km/h

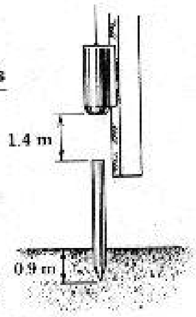
3.191 - کوبه 450 kg از بلندی 1.4 m بر میخ 240 kg می‌افتد. تندی آنها پس از برخورد چیست؟

$v_o=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(1.4)}=5.24$ m/s

$\Delta G=0 \quad 450(5.24)+0=(450+240)v \quad v=3.42$ m/s



نگاره 3.192



نگاره 3.191

3.192 - واگن B 60 Mg به واگن A 80Mg می‌خورد و به آن می‌چسبد. (a) تندی آنها و (b) افت انرژی چیست؟

$\Delta G=0 \quad 80000(3/3.6)+60000(5/3.6)=140000v$

$v=1.07$ m/s$=3.86$ km/h

$|\Delta E|=(1/2)m_Av_A^2+(1/2)m_Bv_B^2-(1/2)(m_A+m_B)v^2=$

$=(1000/2)[80(3/3.6)^2+60(5/3.6)^2-140(3.86/3.6)^2$

$=5172$ J loss

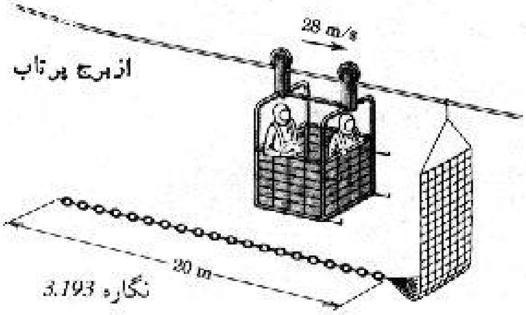
3.193 - گاری 320 kg به توری ایستاده با زنجیر 18 kg/m و ضریب اصطکاک 0.7 می‌رسد. تندی آنها پس از برخورد و زمان ایستادنشان چیست؟

$\Delta G=0 \quad 370(28)-(320+20\times18)v=0 \quad v=13.18$ m/s

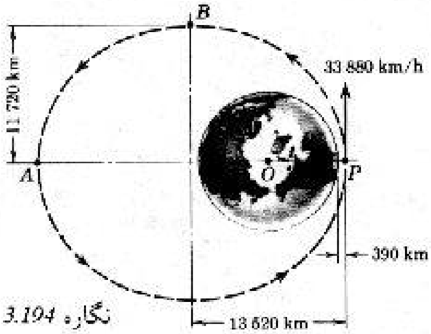
www.collegeprozheh.ir

$$\int\sum Fdt=m\Delta v \quad (20\times18)9.81(0.7)t=(320+20\times18)(13.18)$$

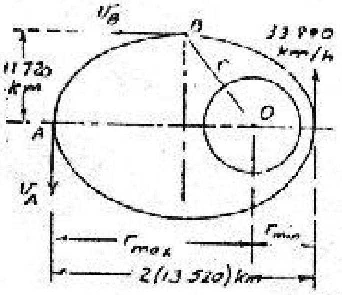
$\underline{t=3.62\ s}$



نگاره 3.193



نگاره 3.194



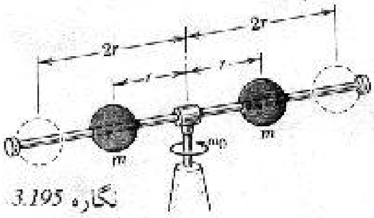
3.194 - تندی ماهواره در B چیست؟

$\sum M_o=\dot{H}_o=0 \Rightarrow H_o=cte \quad r_{min}=6371+390=6761\ km$

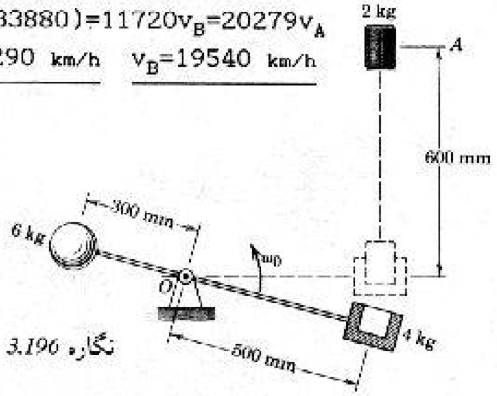
$r_{max}=2(13520)-6761=20279\ km$

$6761(33880)=11720v_B=20279v_A$

$\underline{v_A=11290\ km/h} \quad \underline{v_B=19540\ km/h}$



نگاره 3.195



نگاره 3.196

3.195 - گلوله‌های آزاد در r با ω_0 می‌چرخند. تندی چرخشی آنها در $2r$، و افت انرژی آنها چیست؟

$\Delta H=0 \quad 2mr\omega_o(r)-2m(2r)\omega(2r)=0 \quad \underline{\omega=\omega_o/4}$

$\Delta T=2(m(r\omega_o)^2/2)-2(m(2r\omega_o/4)^2/2)=mr^2\omega_o^2(3/4)$

$n=\Delta T/T=(3/4)mr^2\omega_o^2/mr^2\omega_o^2=\underline{3/4}$

3.196 - وزنه $2\ kg$ هنگامی که بازو با تندی $2\ rad/s$ افقی می‌شود، به آن می‌خورد. تندی چرخشی آن پس از برخورد چیست؟

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.6)}=3.43\ m/s \quad \Delta H_o=0$

$H_{o_1}=-4(0.5)^2(2)-6(0.3)^2(2)+2(3.43)(0.5)=$

$=-2-1.08+3.43=0.351\ N.m.s$

$H_{o_f}=[(4+2)(0.5)^2+6(0.3)^2]\omega=2.04\omega$

www.collegeprozheh.ir

$0.351=2.04\omega \quad \underline{\omega=0.1721 \text{ rad/s CW}}$

3.197 - گلوله 0.8 kg پس از رهایی از B در خشاب 1.8 kg فرو می‌رود. تندی آنها و فشردگی فنر و انرژی ازبین‌رفته چیست؟

$\sqrt{2gh}=\sqrt{2(32.2)6}=19.66$ ft/sec $\quad \Delta G=0$

$2(19.66)/g-(12+4)v/g=0 \quad \underline{v=6.55 \text{ ft/sec}} \quad \Delta T+\Delta V_e=0$

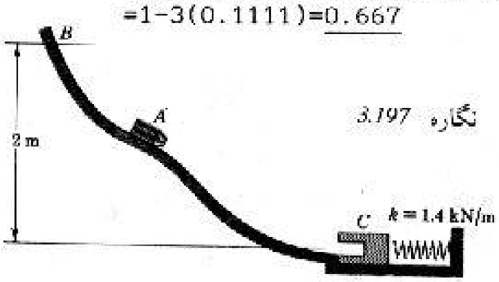
$(1/2)(6/32.2)(0-6.55^2)+(1/2)80(x^2-0)=0$

$x^2=0.100 \text{ ft}^2 \quad \underline{x=0.316 \text{ ft}} \quad n=\Delta T/T$

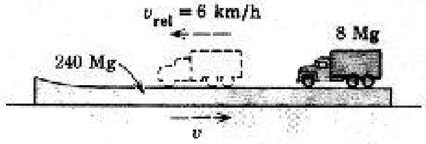
$n=[(1/2)(2/g)(19.66)^2-(1/2)(6/g)(6.55)^2]/$

$[(1/2)(2/g)(19.66)^2]=1-(6/2)(6.55/19.66)^2=$

$=1-3(0.1111)=\underline{0.667}$



نگاره 3.197



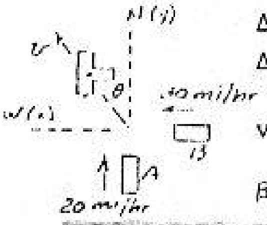
نگاره 3.198

3.198 - تندی کشتی چیست؟

$v_T=v_{rel}-v=6-v$ km/h $\quad \Delta G=0 \quad G_{initial}=G_{final}=0$

$8(6-v)=240v \quad \underline{v=0.194 \text{ km/h}}$

3.199 - خودروی $(1600\ \text{kg})A$ به خودروی $(1500\ \text{kg})B$ می‌خورد و در آن گیر می‌کند. تندی آنها پس از برخورد چیست؟

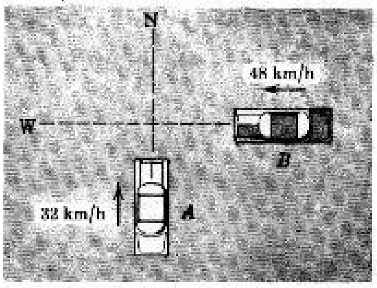


$\Delta G=0 \quad 3200(30)/g=(3200+3400)v_x/g \quad v_x=14.55$ mi/hr

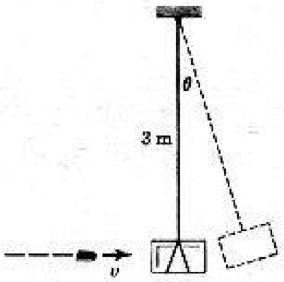
$\Delta G_y=0;\ 3400(120)/g=(3200+3400)v_y/g \quad v_y=10.30$ mi/hr

$v=\sqrt{(14.55)^2+(10.30)^2}=\underline{17.82 \text{ mi/hr}}$

$\beta=\tan^{-1}(v_x/v_y)=\tan^{-1}(14.55/10.30)=\underline{54.7^\circ}$



نگاره 3.199



نگاره 3.200

www.collegeprozheh.ir

3.200 - گلوله 60 gr به‌درون بسته شن 30 kg رفته و آن را 15° می‌راند. تندی گلوله و میرایی انرژی چیست؟

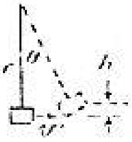
$h=r(1-\cos\theta)=3(1-\cos 15^\circ)=0.1022$ m $\quad \Delta T+\Delta V_g=0$

$mv'^2/2-mgh=0 \quad v'=\sqrt{2gh}$

$v'=\sqrt{2(9.81)0.1022}=1.416$ m/s $\quad \Delta G=0$

$\Rightarrow 0.060v=(30+0.060)(1.416) \quad \underline{v=710 \text{ m/s}}$

$\Delta T/T=(T-T')/T=1-T'/T=1-0.001996=0.998 = \underline{99.8\%}$

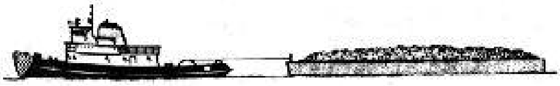


3.201 - کشتی 500 ton باری 900 ton را به تندی 6 گره می‌کشد. اگر ریسمان با تندی 0.5 m/s کوتاه شود، کاهش تندی کشتی چیست؟

$v_B=v+0.5 \quad \Delta G=0$

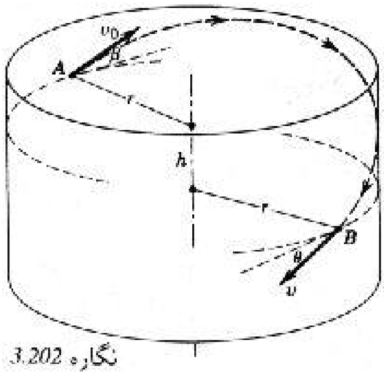
$(500+900)6(1.852/3.6)0=500v+900(v+0.5)$

$v=2.77$ m/s $\quad v=2.77/1.852=\underline{5.38 \text{ Knots}}$



نگاره 3.201

3.202 - θ چیست؟



نگاره 3.202

$\Delta H_z=0$

$mv_o\cos\beta(r)=mv\cos\theta(r), v\cos\beta=v\cos\theta$

$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad (1/2)mv^2-(1/2)mv_o^2-mgh=0$

$\cos\theta=v_o\cos\beta/\sqrt{v_o^2+2gh}$

$\theta=\cos^{-1}(\cos\beta/\sqrt{1+2gh/v_o^2})$

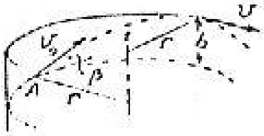
3.203 - در پرسش 3.202 ذره تا چه اندازه بالاتر از A می‌رود و تندیش در آنجا چیست؟

$\Delta H_z=0 \quad mvr=m(v_o\cos\beta)r \Rightarrow \underline{v=v_o\cos\beta}$

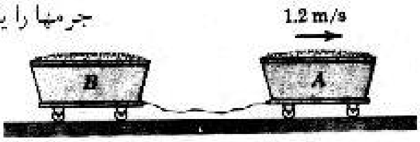
$\Delta T+\Delta V_g=0; (1/2)m(v^2-v_o^2)+mgb=0$

$b=(v_o^2-v^2)/2g=v_o^2(1-\cos^2\beta)/2g$

$\Rightarrow \underline{b=v_o^2\sin^2\beta/2g}$



3.204 - (a) اگر 40% از انرژی A ازبین‌رود، تندی داده به B چیست؟ (b) پس از آنکه B به A برخورد به آن می‌چسبد. تندی آنها چیست؟ جرمها را یکسان بپندارید.



نگاره 3.204

(a) $\Delta G=0 \quad m(1.2)+0=mv_A+mv_B$

$v_A+v_B=1.2 \quad \Delta T=0.4T$

www.collegeprozheh.ir

$(1/2)m(1.2^2)-[mv_A^2/2+mv_B^2/2]=0.4[(1/2)m(1.2^2)]$

$v_A^2+v_B^2=0.864 \quad (1.2-v_B^2)+v_B^2=0.864 \quad 2v_B^2-1.2v_B+0.576=0$

$v_B=0.25[2.4\pm\sqrt{2.4^2-8(0.576)}]=0.6\pm0.268$

1) $v_B=0.868$ m/s $\quad v_A=1.2-0.868=0.332$ m/s

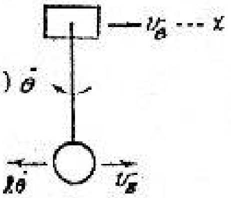
2) $v_B=0.332$ m/s $\quad v_A=1.2-0.332=0.868$ m/s

$v_B>v_A \Rightarrow \underline{v_B=0.868 \text{ m/s}}$

(b) $\Delta G=0 \quad m(1.2)+0=2mv_c \quad \underline{v_c=0.6 \text{ m/s}}$

3.205 - آونگ از $\theta=0$ رها می‌شود. تندی B در $\theta=90^\circ$ چیست؟

$\sum F_x=0 \Rightarrow \Delta G_x=0 \quad m_A(l\dot\theta-v_B)-m_Bv_B=0 \Rightarrow l\dot\theta=v_B(m_A+m_B)/m_A$

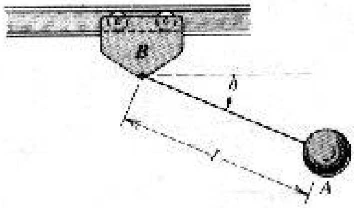


$\Delta T+\Delta V_g=0;\ (1/2)m_A(l\dot\theta-v_B)^2+(1/2)m_Bv_B^2-m_Agl=0$

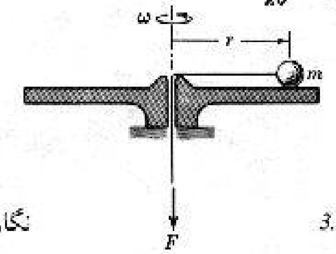
$(1/2)m_A[v_B^2((m_A+m_B)/m_A)^2-2v_B^2((m_A+m_B)/m_A)+v_B^2]+(1/2)$

$m_Bv_B^2=m_Agl \quad v_B^2=2m_A^2gl/[m_B(m_A+m_B)]$

$v_B=(m_A/m_B)\sqrt{2gl/(1+m_A/m_B)}$



نگاره 3.205

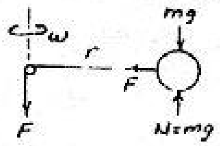


نگاره 3.206

3.206 - با کاهش r، F افزایش می‌یابد و ω تغییر می‌کند. آهنگ تغییر ω و کار F در جابه‌جایی dr چیست؟

$H=d(mr^2\omega)/dt=0 \quad m(2r\omega dr+r^2d\omega)=0$

$\underline{d\omega/dt=-2\omega/r} \quad \sum F_n=ma_n \quad F=mr^2\omega \quad dU=dT$



$-Fdr=d(mr^2\omega^2/2) \Rightarrow -mr\omega^2dr=m(r\omega^2dr+r^2\omega d\omega)=$

$=m(r\omega^2dr+r^2\omega[-2\omega/rdr])=-mr\omega^2dr$

3.207 - ناوچه 60 ton در تندی 18 گره، یک اژدر 140 kg را با تندی 6 m/s پرتاب می‌کند. کاهش تندی ناوچه چیست؟

18 knots$=18(1.852/3.6)=9.26$ m/s $\quad \Delta G=0$

$(G_x)_{initial}=[(60)(1000)+140](9.26)==556900$ N.s

$(v_t)_x=9.26-\Delta v+6\cos30^\circ=14.46-\Delta v$ m/s

$(G_x)_{final}=60000(9.26-\Delta v)+$

$+140(14.46-\Delta v)=557624-600140\Delta v$

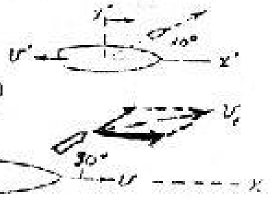
www.collegeprozheh.ir

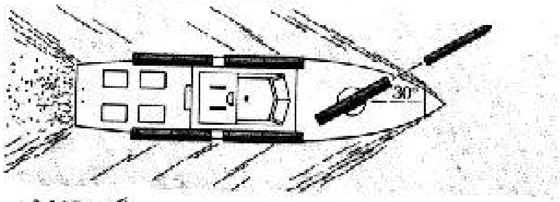
$\Rightarrow 556900-557624+60140\Delta v=0$

$\underline{\Delta v=0.0121 \text{ m/s}}$

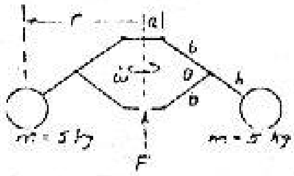
$\Delta G_{x'}=0 \quad -60(1000)\Delta v+140(6\cos30^\circ-\Delta v)/g=0$

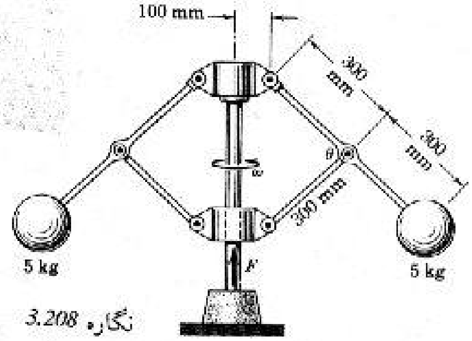
$\underline{v'=0.01214 \text{ m/s}}$





نگاره 3.207





نگاره 3.208

3.208 - دستگاه با تندی 40 rev/min در $\theta=90^\circ$ می‌چرخد. اگر F افزایش یابد و θ به 60° برسد، کار F و تغییر تندی چرخشی چیست؟

$\omega_o=40(2\pi)/60=4.19 \text{ rad/s} \quad a=0.1 \text{ m} \quad b=0.3 \text{ m}$

$\theta=90^\circ \quad r_o=0.1+2(0.3)\cos45^\circ=0.524 \text{ m}$

$\theta=60^\circ \quad r=0.1+2(0.3)\cos30^\circ=0.620 \text{ m}$

$\Delta H=0; 2mr_o^2\omega_o-2mr^2\omega=0$

$\omega=(r_o/r)^2\omega_o=(0.524/0.620)^2(4.19)=$

$=\underline{3.00 \text{ rad/s}} \quad 3.00\times60/2\pi=28.6 \text{ rev/min}$

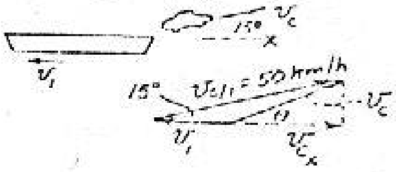
$U=\Delta T+\Delta V_g=2(m/2)(r^2\omega^2-r_o^2\omega_o^2)+2mg\Delta h$

$\Delta h=2b(\sin45^\circ-\sin30^\circ)=2(0.3)(0.7071-0.5)=0.1243 \text{ m}$

$U=5([0.620\times3.00]^2-[0.524\times4.19]^2+$

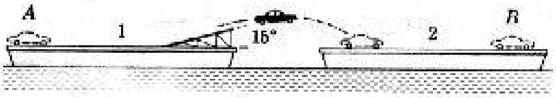
$+2(5)(9.81)(0.1243)=-6.850+12.190=\underline{5.34 \text{ J}}$

3.209 - خودروی 1500 kg از A به‌راه می‌افتد و با تندی 50 km/h از دید کشتی 1 به کشتی 2 می‌پرد. تندی کشتی 2 پس از ایست خودرو در B چیست؟



$\underline{v}_c=\underline{v}_1+\underline{v}_{c/1}$

$(v_c)_x=50\cos15^\circ-v_1=48.296-v_1 \text{ km/h}$



نگاره 3.209

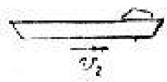
www.collegeprozheh.ir

$\Delta G_x=0; 500\times10^3 v_1=1500(48.296-v_1)$

$v_1=0.144$ km/h $v_1=40.1$ mm/s

$\Delta G_x=0 \quad 1500(48.152)=501500v_2$

$v_2=0.144$ km/h $v_2=40.0$ mm/s

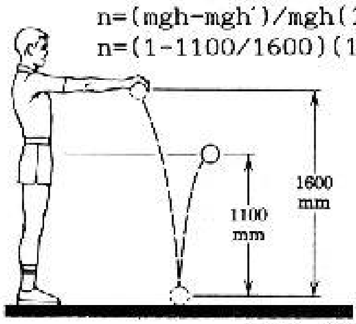


3.210 - جهندگی و درصد کاهش انرژی چیست؟

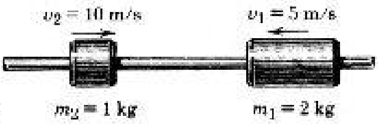
$v=\sqrt{2gh} \quad v'=\sqrt{2gh'} \quad e=v'/v=\sqrt{h/h'}=\sqrt{1100/1600}=0.829$

$n=(mgh-mgh')/mgh(100\%)=(1-h'/h)100\%$

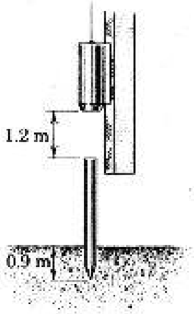
$n=(1-1100/1600)(100\%)=31.2\%$



نگاره 2.210



نگاره 3.211



نگاره 3.212

3.211 - تندی ماسوره‌ها پس از برخورد با جهندگی 0.5 چیست؟

$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \quad 2(5)+1(-10)=2v_1'+v_2' \quad (1)$

$e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)$

$0.5=(v_2'-v_1')/[5-(-10)]=(v_2'-v_1')/15 \quad (2)$

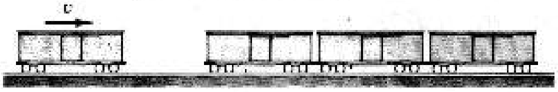
$\Rightarrow v_1'=-2.5$ m/s $\quad v_2'=5$ m/s

3.212 - کوبه 250 kg از آرایش نشان‌داده بر میخ 400 kg می‌افتد. اگر تندی کوبه پس از برخورد صفر شود، جهندگی و تندی میخ چیست؟

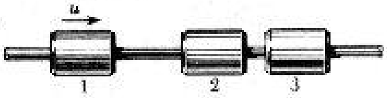
$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(32.2)(4)}=16.05$ ft/sec

$\Delta G=0 \quad 500(16.05)+0=0+800v'$

$v'=10.30$ ft/sec $\quad e=v'/v=10.03/16.05=0.625$



نگاره 3.213



نگاره 3.214

3.213 - تندی واگنها را پس از برخورد و چسبیدن، (a) بدون لقی بین واگنها و (b) با لقی، بیابید.

$G_1=G_2 \quad mv=(4m)v' \quad v'=v/4$

$T=(1/2)mv^2 \quad T'=(1/2)(4m)(v/4)^2=(1/8)mv^2$

$(T-T')/T=(mv^2/2-mv^2/8)/(mv^2/2)=3/4$

www.collegeprozheh.ir

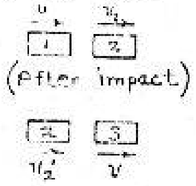
3.214 - تندی ماسوره 3 با جهندگی e چیست؟

$$\Delta G=0 \quad mu=m(u'+v_2) \quad e=(v_2-u')/u$$

$$v_2=u(1+e)/2$$

$$\Delta G=0 \quad mu(1+e)/2=m(v_2'+v)$$

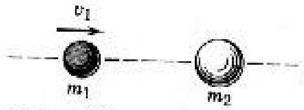
$$e=(v-v_2')/[u(1+e)/2] \quad \underline{v=u(1+e)^2/4}$$



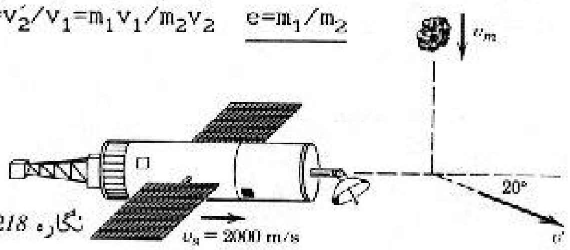
3.215 - با جهندگی e، اندازه m_1/m_2 چه باشد تا m_1 بایستد؟

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \quad v_2'=(m_1/m_2)v_1$$

$$e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)=v_2'/v_1=m_1v_1/m_2v_2 \quad \underline{e=m_1/m_2}$$



نگاره 3.215



نگاره 3.218

3.216 - در پرسش پیش، m_1/m_2 چه باشد تا تندی m_2 در پایان، $1.5v_1$ گردد؟

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'=m_1v_1'+m_2(1.5v_1)$$

$$v_1'=(m_1-1.5m_2)v_1/m_1$$

$$e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)=[1.5v_1-(m_1-1.5m_2)v_1/m_1]/v_1$$

$$\underline{m_1/m_2=1.5/(e-0.5)}$$

3.217 - در پرسش 2.215، تندی بیشینه گلوله 2 چه می‌تواند باشد؟

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \quad e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)$$

$$\Rightarrow v_2'=(m_1/m_2)(1+e)v_1/(1+m_1/m_2)$$

$$\underline{e=1}\ ,\ \underline{m_1/m_2\to\infty} \quad \underline{\Rightarrow v_2'\to 2v_1}$$

3.218 - شهابسنگ 100 kg به ناویز 1000 kg می‌خورد و به آن می‌چسبد. اگر تندی آنها v' شود، تندی شهابسنگ چیست؟

$$m_s\underline{v}_s+m_m\underline{v}_m=(m_s+m_m)\underline{v}' \Rightarrow 1000(2000\underline{i})+100(-v_m\underline{j})=$$

$$=(1000+100)[v'(\cos20^\circ\underline{i}-\sin20^\circ\underline{j})]$$

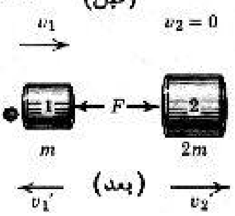
$$\Rightarrow (1000)(2000)=1100\cos20^\circ v' \quad v'=1935 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow -100v_m=-1100(1935)\sin20^\circ \quad \underline{v_m=7280 \text{ m/s}}$$

3.219 - نیروی برخورد چنان است که می‌بینید. تندی v' را با (a) $t_d=t_r$ و (b) $t_r=0.5t_d$ و (c) $t_r=0$ بیابید.

www.collegeprozheh.ir

$e=\int F_r dt / \int F_d dt = t_r/t_d$ (a): $e=1$ (b): $e=0.5$ (c): $e=0$



$\Delta G=0 \quad mv_1+0=-mv_1'+2mv_2', v_1+v_1'=2v_2'$

(a) $1=(v_1'+v_2')/v_1 \Rightarrow v_1+(v_1-v_2')=2v_2'$

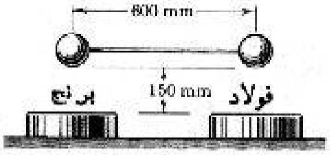
$3v_2'=2v_1 \quad \underline{v_2'=2v_1/3}$

(b) $0.5=(v_1'+v_2')/v_1 \Rightarrow v_1+(0.5v_1-v_2')=2v_2'$

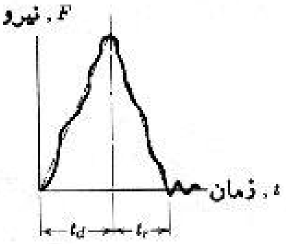
$3v_2'=1.5v_1 \quad \underline{v_2'=v_1/2}$

(c) $0=(v_1'+v_2')/v_1 \Rightarrow v_1+(0-v_2')=2v_2'$

$3v_2'=v_1, \underline{v_2'=v_1/3}$



نگاره 3.219



نگاره 3.220

3.220 - اگر جهندگی فولاد، 0.6 و از آن برنج، 0.4 باشد، تندی چرخشی میله پس از افتادن و برخورد چیست؟

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.15)}=1.716$ m/s

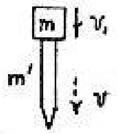
$0.6=v_s/1.716 \quad v_s=1.029$ m/s

$0.4=v_s/1.716 \quad v_b=0.686$ m/s

$\omega=(1.029-0.686)/0.60$

$\underline{\omega=0.572 \text{ rad/s CCW}}$

3.221 - کوبه پرسش 3.212 باید پس از برخورد همه انرژی‌اش را به میخ 300 kg بدهد. اگر کوبه از بلندی 4 m بیفتد، جرمش چیست و تندی میخ چه می‌شود؟



$\Delta G=0, mv_1+0=300v+0 \quad e=(v-0)/(v_1-0)$, so

$0.3=m/300, \underline{m=90 \text{ kg}}$

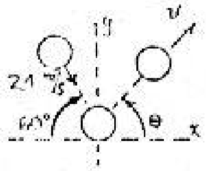
$v_1=\sqrt{2(9.81)(4)}=8.86$ m/s

$v=ev_1=0.3(8.86)=\underline{2.26 \text{ m/s}}$

$\Delta E=mgh-m'v^2/2=$

$=90(9.81)(4)-(1/2)(300)(2.66)^2=\underline{2470 \text{ J}}$

3.222 - با $v_0=24$ m/s و $e=0.8$ اندازه v و θ چیست؟



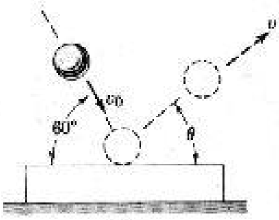
$\sum F_x=0 \quad v\cos\theta=24(0.5)=12$ m/s

$e=v\sin\theta/24\cos30^\circ=0.8$

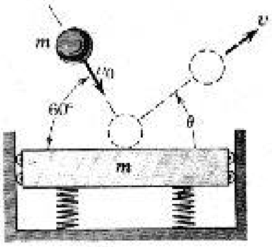
$\tan\theta=16.63/12=1.386 \quad \underline{\theta=54.2^\circ}$

www.collegeprozheh.ir

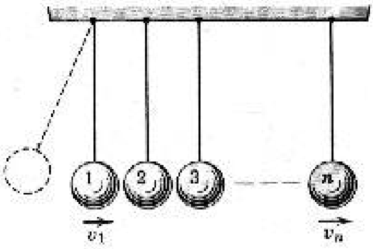
$v=12/\cos 54.2^{\circ}=\underline{20.5\ m/s}$



نگاره 3.222



نگاره 3.223



نگاره 3.224

3.223 - پرسش پیش را برای دستگاه زیر دوباره پاسخ دهید.

$$\text{Ball: } m_1v_{1t}=m_1v'_{1t} \quad v'_{1t}=v_{1t}=24\cos 60^{\circ}=12\ m/s$$

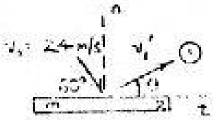
$$\text{plate:} m_2v_{2t}=m_2v'_{2t} \quad v'_{2t}=v_{2t}=0$$

$$m_1v_{1n}+m_2v_{2n}=m_1v'_{1n}+m_2v'_{2n} \quad -24\sin 60^{\circ}=v'_{1n}+v'_{2n}$$

$$e=(v'_{2n}-v'_{1n})/(v_{1n}-v_{2n})$$

$$0.8=(v'_{2n}-v'_{1n})/(-24\sin 60^{\circ}-0)$$

$$v'_{1n}=-2.08\ m/s \quad \underline{v'_{2n}=-18.71\ m/s}$$



$$v'_1=\sqrt{v'^2_{1t}+v'^2_{1n}}=\underline{12.20\ m/s} \quad \theta=\tan^{-1}(v'_{1n}/v'_{1t})=\underline{-9.83^{\circ}}$$

3.224 - تندی گلوله nام چیست؟

$$\Delta G=0 \quad mv_1=-mv'_1+mv'_2 \quad v'_2=v_1+v'_1$$

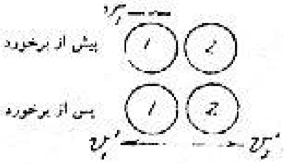
$$e=(v'_2+v'_1)/v_1,\ v'_1=ev_1-v'_2$$

$$v'_2=v_1+ev_1-v'_2 \quad v'_2=(1+e)v_1/2$$

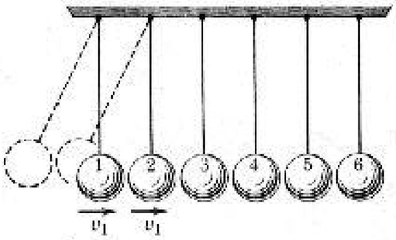
$$v'_3=(1+e)v'_2/2=[(1+e)/2]^2v_1$$

$$v'_4=(1+e)v'_3/2=[(1+e)/2]^3v_1$$

$$\Rightarrow \underline{v_n=[(1+e)/2]^{n-1}v_1}$$



3.225 - چرا با $e=1$ به جای آنکه یک گلوله با تندی $2v_1$ بیرون بزند، دو گلوله با تندی v_1 بیرون می‌زند؟



نگاره 3.225

$$2(1mv_1)=1(2m)v_1 \quad e=1$$

$$T=2(mv_1^2/2)=mv_1^2$$

$$T'_a=2(mv_1^2/2)=mv_1^2$$

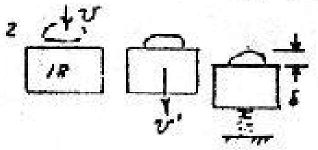
$$T'_b=1(m(2v_1)^2/2)=2mv_1^2$$

www.collegeprozheh.ir

3.226 - فشردگی فنرها به سختی 1.2 kN/m پس از برخورد چیست؟

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(2)}=6.26\ m/s$ $\quad \Delta G=0\ ;\quad 2(6.26)+0=(2+18)v'$,

$v'=0.626\ m/s$



$\delta_e=W/2k=18(9.81)/(2)(1200)=0.074\ m$

$\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0$

$\Delta T=0-(1/2)(20)(0.626)^2=-3.92\ N.m$

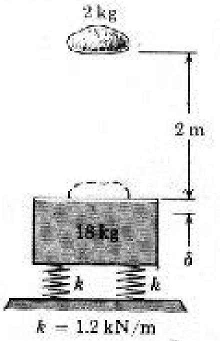
$\Delta V_g=-20(9.81)\delta=-196.2\delta\ N.m$

$\Delta v_e=2[(1/2)(1200)[(0.074+\delta)^2-0.074^2]$

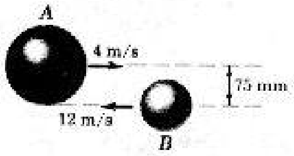
$1200\delta^2-19.2\delta-3.92=0$

$\delta=[19.2\pm137.24]/2400$

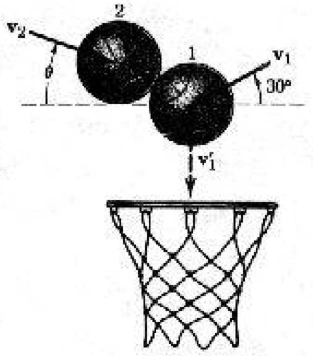
$\underline{\delta=65.2\ mm}\qquad \delta=-49.2\ mm$



نگاره 3.226



نگاره 3.227



نگاره 3.228

3.227 - گلوله A به جرم 23 kg و شعاع 75 mm به گلوله B به جرم 4 kg و شعاع 50 mm می‌خورد، تندی آنها پس از برخورد چیست؟

$\Delta \underline{G}_n=0$

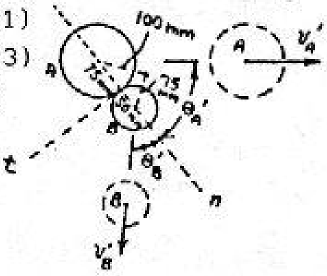
$23v'_A\cos\theta'_A+4v'_B\cos\theta'_B=23(4)(4/5)-4(12)(4/5)\quad (1)$

$A: 4(3/5)=v'_n\sin\theta'_A\quad (2)\qquad B: 12(3/5)=v'_B\sin\theta'_B\quad (3)$

$0.4=(v'_B\cos\theta'_B-v'_A\cos\theta'_A)/[12(4/5)+4(4/5)]\quad (4)$

$(1)-(4):\ \Rightarrow\ \underline{v'_A=2.46\ m/s\ ,\theta_A=77.2^o}$

$\underline{v'_B=9.16\ m/s\ ,\theta_B=51.8^o}$



3.228 - با جهندگی 0.8 و تندیهای برابر v_1 و v_2 اندازه θ چه باشد که توپ 1 از سبد بگذرد؟

$m(-v_1\cos60^o)+m(v_2\cos\alpha)=m_1v'_{1n}+m_2v'_{2n}$

$e=0.8=(v'_{2n}-v'_{1n})/(-v_1\cos60^o-v_2\cos\alpha)$

www.collegeprozheh.ir

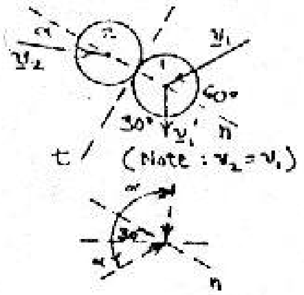
$v'_{1n}=v_1[0.9\cos\alpha-0.05]$

$v'_{1t}=v_{1t}=v_1\sin 60^\circ=(\sqrt{3}/2)v_1$

$\tan 30^\circ=v'_{1n}/v'_{1t}=v_1[0.9\cos\alpha-0.05]/(\sqrt{3}/2)v_1$

$\cos\alpha=0.611 \quad \alpha=\pm 52.3^\circ \quad \theta=30^\circ+52.3^\circ=\underline{82.3^\circ}$

$\theta=30^\circ-52.3^\circ=\underline{-22.3^\circ}$



3.229 - با جهندگی 0.6، تندی گلوله‌ها پس از برخورد و درصد میرایی انرژی چیست؟

$\Delta G_y=0 \Rightarrow [m(6\cos 30^\circ)-m(4)]-[m(-v'_1\sin\theta'_1)+mv'_2]=0$

$v'_2-v'_1\sin\theta'_1=1.196 \quad \Delta v_x=0 \Rightarrow v'_1\cos\theta'_1=6(1/2) \quad v'_{2x}=0$

$e=0.60=(v'_2+v'_1\sin\theta'_1)/(4+6\cos 30^\circ) \quad v'_2+v'_1\sin\theta'_1=5.518$

$2v'_2=1.196+5.518 \quad \underline{v'_2=3.36} \quad v'_1\sin\theta'_1=2.16$

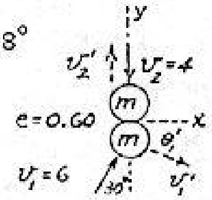
$v'_1\cos\theta'_1=3 \quad \theta'_1=\tan^{-1}(0.7203)=35.8^\circ$

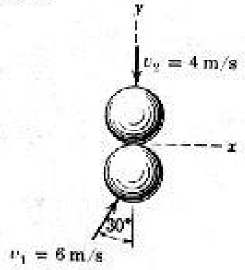
$v'_1=3/\cos 35.8^\circ=\underline{3.70}$

$T_i=m(6^2+4^2)/2=m(52)/2$

$T_f=m(3.70^2+3.36^2)/2=m(24.9)/2$

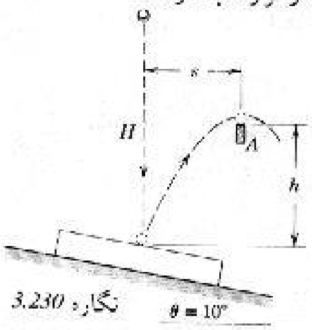
$Loss\%=(52-24.9)/52=0.52 \quad or \quad \underline{52\%}$



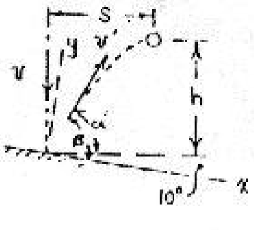


نگاره 3.229

3.230 - اندازه h و s چه باشد تا با $e=0.7$ و $H=900\ mm$ گلوله از فراز A بگذرد؟



نگاره 3.230



$F_x=0 \quad \Delta G_x=0 \quad v\sin\theta=v'\cos\beta \quad (a)$

$e=v'\sin\beta/(v\cos\theta)$

$\tan\beta=e\tan\theta=0.7(5.67)=3.77$

$\beta=75.9^\circ \quad \alpha=65.9^\circ$

$v=\sqrt{2gH}=\sqrt{2(9.81)(0.9)}=4.20\ m/s$

$v'=0.7(4.20)(0.985)/0.970=2.99\ m/s$

$h=v'^2\sin^2\alpha/2g=$

$=(2.99)^2\sin^2 65.9/(2\times 9.81)=0.379\ m$

$\underline{h=379\ mm}$

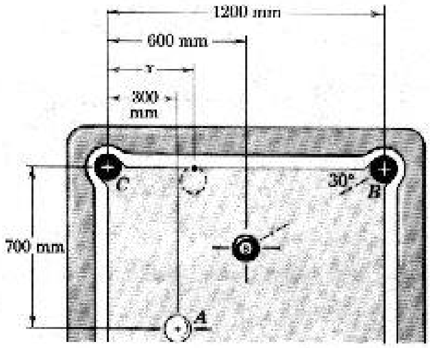
$s=v'^2\sin 2\alpha/2g$

$=(2.99)^2\sin(2\times 65.9^\circ)/(2\times 9.81)=$

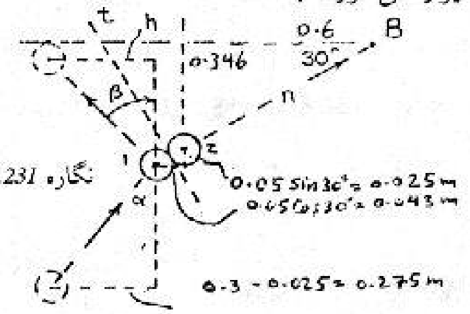
$=0.339\ m \quad \underline{s=339\ mm}$

www.collegeprozheh.ir

3.231 - گوی A باید با جهندگی 0.9 گوی 8 را به سوراخ B بیندازد. جایی که گوی A پس از زدن 8 به دیواره می‌خورد کجاست؟



نگاره 3.231



$\alpha=\tan^{-1}(0.275/0.346)=38^\circ \quad \theta_1=\alpha+30^\circ=68.0^\circ$

$m_1(v_1)_n+m_2(v_2)_n=m_1(v_1')_n+m_2(v_2')_n$ شعاع گوی‌ها $50\ mm$ و جرمها برابر است.

$v_1\sin 68.0^\circ=(v_1')_n+(v_2')_n$

$e=[(v_2')_n-(v_1')_n]/[(v_1)_n-(v_2)_n]$

$0.9=[(v_2')_n-(v_1')_n]/[v_1\sin 68.0^\circ-0]$

$(v_1')_n=0.0464v_1 \quad (v_1')_t=(v_1)_t=v_1\cos 68.0^\circ=0.375v_1$

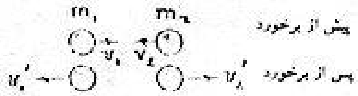
$\tan\theta_1'=(v_1')_n/(v_1')_t=0.0464v_1/0.375v_1,\ \theta_1'=7.05^\circ$

$\beta=30-\theta_1'=22.95^\circ \quad \tan\beta=h/(0.346-0.025+0.025)=0.423$

$h=0.146\ ,\ x=0.6-0.043-0.146=\underline{0.411\ m}$

3.232 - نشان دهید که میرایی انرژی دو گوی m_1 و m_2 با تندی v_1 و v_2 چنین است:

$$\Delta E=\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1+v_2)^2$$



$v_1'=v_1(v_2'/v_2),\ v_2'=v_2(v_1'/v_1) \quad m_1v_1=m_2v_2 \quad m_1v_1'=m_2v_2'$

$e=(v_1'+v_2')/(v_1+v_2) \quad v_1'(1+v_2/v_1)=e(v_1+v_2)$

$\Rightarrow v_1'=ev_1 \quad v_2'=ev_2$

$\Delta E=(1/2)m_1v_1^2+(1/2)m_2v_2^2-(1/2)m_1v_1'^2+(1/2)m_2v_2'^2=$

$=(1/2)\{m_1v_1^2(1-e^2)+m_2v_2^2(1-e^2)\}=(1-e^2)(m_1v_1^2+m_2v_2^2)/2$

$m_1v_1+[m_2v_1]=m_2v_2+[m_2v_1],\ v_1=m_2(v_1+v_2)/(m_1+m_2)\ ,$

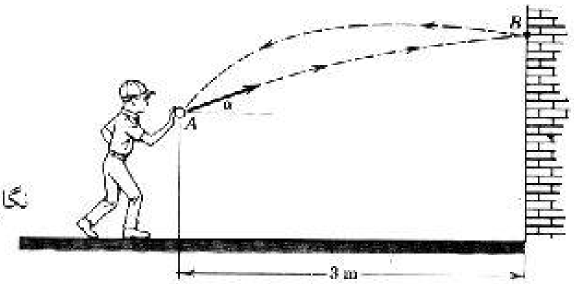
$m_2v_2+[m_1v_2]=m_1v_1+[m_1v_2],\ v_2=m_1(v_1+v_2)/(m_1+m_2)$

$\underline{\Delta E=\{(1-e^2)/2\}\{m_1m_2/(m_1+m_2)\}(v_1+v_2)^2}$

3.233 - زاویه پرتاب توپ با تندی $15\ m/s$ چه باشد تا پس از برخورد با دیوار به جهندگی 0.5 به

www.collegeprozheh.ir

دست پسرک برگردد؟



نگاره 3.233

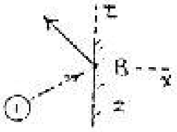
$v_{xA}=50\cos\alpha \quad v_{yA}=50\sin\alpha$

$t_{AB}=10/v_{xA}=10/50\cos\alpha=1/5\cos\alpha$

$v_{xB}=v_{xA}=50\cos\alpha \quad v_{yB}=v_{yA}-gt=50\sin\alpha-g/5\cos\alpha$

$y_B=y_A+y_At-gt^2/2=0+(50\sin\alpha)(1/5\cos\alpha)$

$(-g/2)(1/25\cos^2\alpha)=10\tan\alpha-g/50\cos^2\alpha$



B: $v'_{yB}=v_{yB}=50\sin\alpha-g/5\cos\alpha$

$e=(v'_{2x}-v'_{1x})/(v_{1x}-v_{2x})=(0-v'_{1x})/(50\cos\alpha-0)=0.5$

$v'_{1x}=-25\cos\alpha \quad t_{BA}=10/(25\cos\alpha)=2/(5\cos\alpha)$

$y_A=y_B+y_Bt-gt^2/2 \Rightarrow$

$0=[10\tan\alpha-g/(50\cos^2\alpha)]+$

$+(50\sin\alpha-g/5\cos\alpha)(2/5\cos\alpha)-(g/2)(2/5\cos\alpha)^2$

$30\tan\alpha-(9g/50)(1/\cos^2\alpha)=0 \quad 1/\cos^2\alpha=1+\tan^2\alpha$

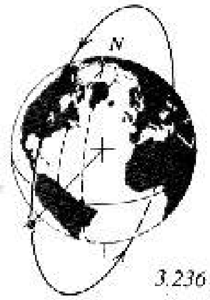
$5.776\tan^2\alpha-30\tan\alpha+5.796=0 \quad \tan\alpha=0.201 \quad \underline{\alpha=11.4^\circ}$

3.234 - اگر مدار زمین، دایره‌ای به شعاع $150(10^6)$ km باشد، تندی زمین چیست؟

$v=\sqrt{Gm_s/r}=\sqrt{(6.673\times10^{-11})(333000)(5.976\times10^{24})/(150\times10^6)}$

$\underline{v=29.75 \text{ km/s}}$

3.236 - ماهواره در بلندی 300 km بر فراز قطبها می‌گردد. فاصله سایه ماهواره بر استوا در دو گذر پیاپی چیست؟



$r=a=6371+300=6671 \text{ km} =6.671(10^6) \text{ m}$

$\tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g}=2\pi(6.671\times10^6)^{3/2}/[6.371\times10^6\sqrt{9.825}]=$

$=5421 \text{ s}$

$v_e=R_e\omega_e=(6378)(7.292\times10^{-5})=0.4651 \text{ km/s}$

$d=v_e\tau=(0.4651)(5421)=\underline{2520 \text{ km}}$

نگاره 3.236

www.collegeprozheh.ir

3.237 - v_B چه باشد تا ماهواره در C به زمین برسد؟

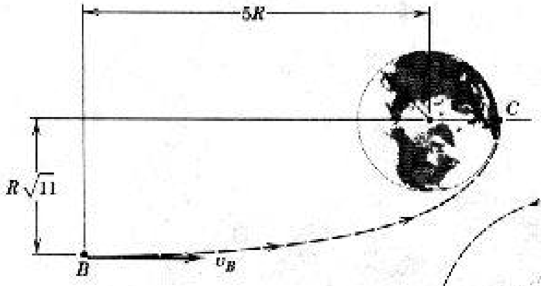
$r_{min}=a(1-e) \quad R=6R(1-e) \quad e=5/6$

$\Rightarrow b=a\sqrt{1-e^2}=6R\sqrt{1-(5/6)^2}=R\sqrt{11}$

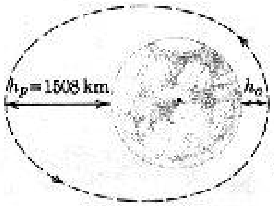
$B:\ r=\sqrt{(5R)^2+(R\sqrt{11})^2}=6R$

$v_B^2=2gR^2(1/r-1/2a)=2gR^2(1/6R-1/12R)$

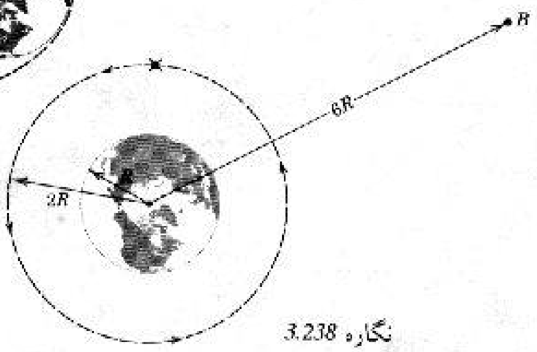
$v_B=0.4082\sqrt{gR}=0.4082\sqrt{(9.825)(6371\times10^6)}=\underline{3230\ m/s}$



نگاره 3.237



نگاره 3.240



نگاره 3.238

3.238 - کمترین افزایش تندی ماهواره چه باشد که به B برسد؟

$r_{min}=2R \quad r_{max}=6R \quad a=(r_{min}+r_{max})/2=(2R+6R)/2=4R$

$v_P=R\sqrt{g/a}\sqrt{r_{max}/r_{min}}=R\sqrt{g/4R}\sqrt{6R/2R}=(\sqrt{3}/2)R\sqrt{g/R}$

$v_c=R\sqrt{g/a}=R\sqrt{g/2R}$

$\Delta v=v_p-v_c=(\sqrt{3}/2)R\sqrt{g/R}-R\sqrt{g/2R}=R\sqrt{g/R}(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$

$=6.371(10^6)\sqrt{9.825/(6.371\times10^6)}(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2=\underline{1257\ m/s}$

3.239 - موشکی در بلند H به گرد زمین می‌گردد. چه تندیی می‌خواهد تا از گرانش زمین بگریزد؟

$a=\infty \quad r=R+H \quad v^2=2gR^2[1/(R+H)-1/\infty] \quad v=R\sqrt{2g/(R+H)}$

3.240 - h_a چه باشد تا دماهنگ ماهواره‌ای به گرد مریخ، 24 ساعت و 37 دقیقه و 23 ثانیه گردد؟

$2R=6788\ km \quad g=3.73\ m/s^2 \quad h_p=1508\ km \quad \tau=24\ h\ 37min$

$23s=88643\ s \quad \tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g} \qquad a=(\tau R\sqrt{g}/2\pi)^{2/3}$

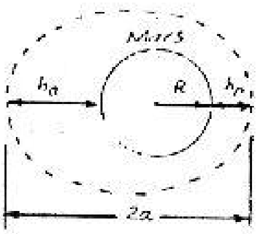
www.collegeprozheh.ir

$a=[(88643)(6788\times10^3/2)\sqrt{3.73}/2\pi]^{2/3}$

$=(924.8\times10^8)^{2/3}$

$a^3=8552\times10^{18}\ m^3 \quad a=2045\times10^6\ m=20.45\times10^3\ km$

$h_a=2a-2R-h_p=2(20.45\times10^3)-6788-1508=\underline{32600\ km}$



3.241 - برونمرکزی و دمانگی مداری با نشیب 240 km و فراز 400 km چیست؟

$r_{min}=6371+240=6611\ km \quad r_{max}=6371+400=6771\ km$

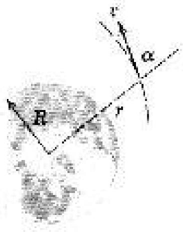
$r_{min}/r_{max}=(1-e)/(1+e) \Rightarrow (1+e)6611=(1-e)6771$

$e=0.01196 \quad a=(r_{min}+r_{max})/2=6691\ km$

$\tau=2\pi(6691\times10^3)^{3/2}/[(6371\times10^3)\sqrt{9.824}]=5446\ s$

$\Rightarrow \underline{\tau=1\ h\ 30\ min\ 46\ s}$

3.242 - شعاع خمیدگی مدار در آرایش نشان‌داده چیست؟

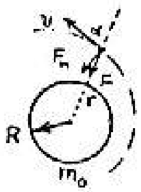


نگاره 3.242

$F=Gmm_o/r^2=gR^2m/r^2 \quad \sum F_n=ma_n$

$gR^2m/r^2\sin\alpha=mv^2/\rho$

$\underline{\rho=r^2v^2/(gR^2\sin\alpha)}$



3.243 - ماهواره‌ای در مداری قطبی با $e=0.7$ و نشیب 500 km بر قطب شمال با چه تندی از استوا می‌گذرد؟

$r_{min}=a(1-e)=R+H=6371+500=6871\ km \quad e=0.7$

$\theta=\pi/2,\ 1/r=1/[a(1-e^2)]=1/[(R+H)(1+e)]$

$v^2=2gR\{1/[(R+H)(1+e)]-(1-e)/2(R+H)\}$

$v^2=[gR^2/(R+H)][(1+e^2)/(1+e)]=659(10^6)\ (km/h)^2$

$\underline{v=25680\ km/h}$

3.244 - ناویزی به گرد ماه در مدار با نشیب 100 km و فراز 300 km چه بیشینه تندی دارد؟

$R=1738\ km \quad g=1.62\ m/s^2 \Rightarrow r_{max}=1738+300=2038\ km$

$r_{min}=1738+100=1838\ km$

$a=(r_{min}+r_{max})/2=(2038+1838)/2=1938\ km$

$v_p=R\sqrt{g/a}\sqrt{r_{max}/r_{min}} \Rightarrow$

$v_p=1738\sqrt{1.62/1938}\sqrt{3600^2/1000}\sqrt{2038/1838}$

$\underline{=6024\ km/h}$

www.collegeprozheh.ir

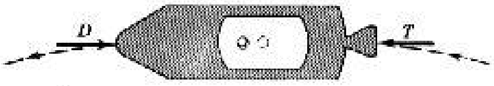
3.245 - ماهواره 100 kg در مداری دایره‌ای با بلندی 200 km به گرد زمین می‌گردد. اگر $T=5$ N در ده بار گردش، بتواند 300 ثانیه کار کند، نیروی D برای بی‌تکان نگه‌داشتن گلوله آزاد درونی ماهواره چیست؟

$$Dt=\sum Tt_{burn} \quad t=10\tau \quad \tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g}$$

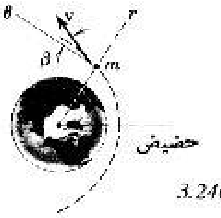
$$\tau=2\pi(6.571\times10^{6})^{3/2}/[6.371\times10^{6}\sqrt{9.825}]=5300 \text{ s}$$

$$t=10\tau=53,000 \text{ s}$$

$$D=(\sum Tt_{burn})/t=5(300)/53,000=\underline{0.028 \text{ N}}$$



نگاره 3.245



نگاره 3.246

3.246 - وابستگی β و θ چیست؟

$$\tan\beta=\dot{r}/(r\dot{\theta}) \quad r=a(1-e^{2})/(1+e\cos\theta)$$

$$\dot{r}=[a(1-e^{2})e\dot{\theta}\sin\theta]/(1+e\cos\theta)^{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\tan\beta=e\sin\theta/(1+e\cos\theta)}$$

3.247 - اگر جرم ماهواره پرسش 3.27 برابر 500 kg باشد، انرژی داده‌شده به آن برای رسیدن به مدار چیست؟

$$E=\Delta T+\Delta V_{g};\ \Delta T=m(v_{p}^{2}-R^{2}\omega^{2})/2 \quad v_{p}=7261 \text{ m/s}$$

$$R\omega=6371(10^{3})(0.729\times10^{-4})=464.6 \text{ m/s}$$

$$\Delta T=(1/2)(500)(7261^{2}-465^{2})=13127(10^{6}) \text{ J}$$

$$V_{g}=-mgR^{2}/r \Rightarrow \Delta V_{g}=-mgR^{2}(1/r_{p}-1/R)=$$

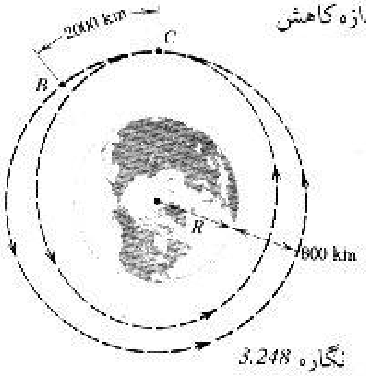
$$=-500(9.824)(6371\times10^{3})^{2}(1/8371-1/6371)(10^{-3})=$$

$$=7477(10^{6}) \text{ J}$$

$$\Rightarrow E=13126(10^{6})+7477(10^{6})=20603(10^{6}) \text{ J}$$

$$\underline{E=20.6 \text{ GJ}}$$

3.248 - ماهواره C از B پس افتاده است. تندیش را چه اندازه کاهش دهد تا مدارش بیضی شود و در گردش بعد به B برسد؟



نگاره 3.248

$$v=R\sqrt{g/a}=6376000\sqrt{9.81/7176000}$$

$$=7454.9 \text{ m/s}$$

$$t=[2\pi r-2000000]/v=5780 \text{ s}$$

$$\tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g} \quad a=(\tau R\sqrt{g}/2\pi)^{2/3}$$

$$a=[5780(6376000)\sqrt{9.81}/2\pi]^{2/3}$$

$$=6955764.7 \text{ m}$$

www.collegeprozheh.ir

At apogee $v_c=\sqrt{2gR^2(1/r-1/2a)}=7332.1$ m/s

$\Delta v=v-v_c=7454.9-7332.1=\underline{122.8 \text{ m/s}}$

3.249 - در پرسش پیش، اگر ماهواره C بخواهد پس از دو بارگردش به B برسد، کاهش تندیش چیست؟

$v=7454.9$ m/s $t=(4\pi r-2000000)/v=11828$ s

$a=(\tau R\sqrt{g}/2\pi)^{2/3}=[(11828/2)(6376000)\sqrt{9.81}/2\pi]^{2/3}=$
$=7067295.5$ m

At Apogee: $v_c=\sqrt{2gR^2(1/r-1/2a)}=7397.1$ m/s

$\Delta v=v-v_c=7454.9-7397.1=\underline{57.8 \text{ m/s}}$

3.250 - شعاع خمیدگی مدار در تشیبی به بلندی H چیست؟

$\sum F_n=ma_n: F=mv^2/\rho \quad F=Gmm_o/(R+H)^2=gR^2m/(R+H)^2$

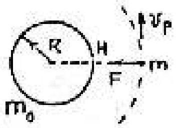
$\Rightarrow gR^2/(R+H)^2=v^2/\rho$

at perigee: $v^2=(gR^2/a)(1+e)/(1-e)$

$R+H=r_{min}=a(1-e)$, so $v^2=gR^2(1+e)/(R+H)$

$gR^2/(R+H)^2=[gR^2/(R+H)][(1+e)/\rho]$

$\Rightarrow \underline{\rho=(R+H)(1+e)}$



3.251 - ماهواره‌ای در مداری دایروی به بلندی 320 km می‌گردد. اگر موشک آن، تندیش را 300 m/s بیفزاید، بلندفراز مدار نوین آن چه می‌شود؟

$R=6371$ km $r_{min}=6371+320=6691$ km

$v_{cir}=R\sqrt{g/a}=6371000\sqrt{9.81/6691000}=7714$ m/s

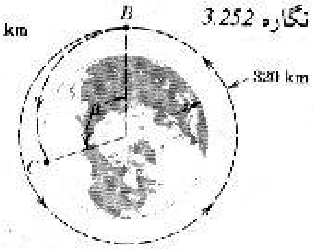
elliptical orbit:

$v_p=7714+300=8014$ m/s

$8014^2=2\times9.81\times6371^2\times10^6(1/6691000-1/2a)$

$2a=r_{max}+r_{min}=14534883 \quad r_{max}=7843883$ m

$H=7843883-6371000=1472883$ m $=1472$ km



نگاره 3.252

3.252 - دو موتور شاتل 80 Mg با نیروی 27 kN در زمان 150 s از B ترمز می‌گیرد، زاویه β چیست؟

$v=R\sqrt{g/r}$

www.collegeprozheh.ir

$v=6376000\sqrt{9.81/(6696000)}=7717.5$ m/s

$a_t=F/m=27000/80000=0.3375$ m/s^2

$v_o=v-a_t t=7717.5-0.3375(150)=7666.9$ m/s

$v^2=2gR^2[1/r-1/2a]$ $a=2.1403(10^7)$ m

$v_A=R\sqrt{g/a}\sqrt{(1-e)/(1+e)}$ $e=0.02599$

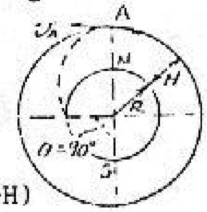
$r=a(1-e^2)/(1+e\cos\theta)$

$(3959)(5280)=$

$=(2.1403\times10^7)(1-0.02599^2)/(1+0.02599\cos\theta)$

$\theta=26.7^\circ$ $\beta=180-\theta=\underline{153.3^\circ}$

3.253 - کاهش تندی در A چه باشد تا ماهواره بر استوا بنشیند.



$1/r=(1+e\cos\theta)/a(1-e^2)$

$\theta=90^\circ \Rightarrow r=R$, $\theta=180^\circ \Rightarrow r=R+H$

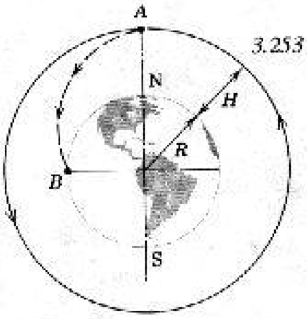
$\Rightarrow 1/R=1/a(1-e^2)$ $1/(R+H)=(1-e)/a(1-e^2)=1/a(1+e)$

$1-e=R/(R+H)$ & $a(1+e)=R+H$

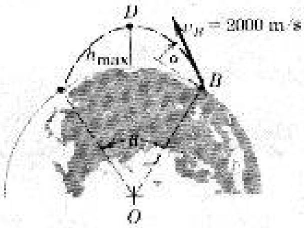
$v_A=R\sqrt{g(1-e)/a(1+e)}=R\sqrt{g}\sqrt{R/(R+H)}\sqrt{1/(R+H)}=R\sqrt{gR/(R+H)}$

circular orbit: $v=R\sqrt{g/(R+H)}$

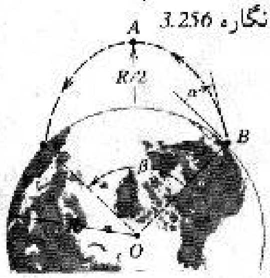
$\Rightarrow \Delta v_A=R\sqrt{g/(R+H)}-R\sqrt{gR/(R+H)}=R\sqrt{g/(R+H)}[1-\sqrt{R/(R+H)}]$



نگاره 3.253

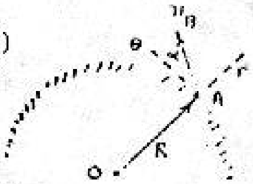


نگاره 3.254



نگاره 3.256

3.254 - پرتابه تا چه بلندی پرواز می‌کند؟



$v_\theta=V\cos\alpha=2000\cos30^\circ=1732$ m/s

$V_r=V\sin\alpha=2000\cos30^\circ=1000$ m/s $v^2=2gR^2(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a})$

B: $a=3.2906\times10^6$ m $T_B=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}m(2000)^2=2\times10^6$ m

$V_B=\frac{-mgR^2}{r}=\frac{-m(9.825)(6.371\times10^6)^2}{6.371\times10^6}=-6.2595\times10^7$ m

$E=T_B+V_B=-6.0595\times10^7$ m ... h ... 10^{10}

www.collegeprozheh.ir

$$e=\sqrt{1+(2Eh^2)/(mg^2R^4)}=0.9525$$

$$r_{max}=a(1+e)=3.2906(10^6)(1+0.9525)=6.4249\times10^6\ \text{m}$$

$$h_{max}=r_{max}-R=53900=\underline{53.9\ \text{km}}$$

3.255 - در پرسش پیش، زاویه β چیست؟

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta=\frac{a(1-e^2)-r}{re}=$$

$$=\frac{3.2906(10^6)(1-0.9525^2)-6.371(10^6)}{6.391(10^6)(0.9525)}=-0.9996$$

$$\theta=178.3^\circ\ ,\ 181.7^\circ\Rightarrow\beta=181.7-178.3=\underline{3.3^\circ}$$

3.256 - تندی پرتاب در B چه باشد که $\beta=90^\circ$ گردد؟

$$r_{max}=\frac{3R}{2}=a(1+e)\qquad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

$$B:\ R=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(135^\circ)}\Rightarrow e=0.6306\quad a=0.9199R$$

$$v_B^2=2gR^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)$$

$$A:\ v_B^2=2(9.825)(6.371\times10^6)\times\left(\frac{1}{6.371\times10^6}+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(0.9199)(6.37)(10^6)}\right)\Rightarrow\underline{v_B=7560\ \text{m/s}}$$

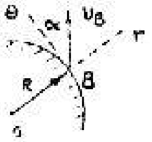
3.257 - زاویه پرتاب در پرسش پیش چیست؟

$$v_A=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{(1-e)/(1+e)}=$$

$$=R\sqrt{(9.825)/(0.9199R)}\ \sqrt{(1-0.6306)/(1+0.6306)}=$$

$$=1.555\sqrt{R}$$

$$h=r_Av_A=\frac{3}{2}R(1.555\sqrt{R})=2.3332R^{3/2}$$



$$h=r_Bv_{B\theta}=Rv_{B\theta}=2.3332R^{3/2}$$

$$v_{B\theta}=2.3332R^{1/2}=2.3332(6.371\times10^6)^{1/2}=5.889\ \text{m/s}$$

$$v_{B\theta}=v_B\cos\alpha\quad\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{v_{B\theta}}{\ }\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5889}{\ }\right)=\ldots^\circ$$

www.collegeprozheh.ir

3.258 - در B به ماهواره، تندی شعاعی $500\ m/s$ می‌دهیم. نیم‌قطر بزرگ مدار نوین آن چیست و چه زاویه‌ای با l می‌سازد؟

$v=R\sqrt{g/a}\quad v_\theta=6.371(10^6)\sqrt{9.825/6.871\times10^6}=7618\ m/s$

$v_r=500\ m/s\quad v=\sqrt{v_\theta^2+v_r^2}=7635\ m/s\quad v^2=2gR^2[\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}]$

$B:\ \underline{a=6900.7\ km}\quad T_B=\frac{1}{2}mv_B^2=2.9145(10^7)m$

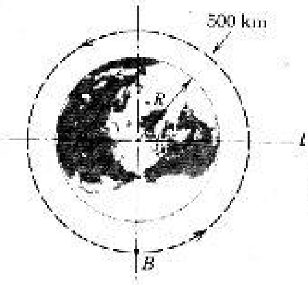
$V_B=mgR^2/r_B=-5.8040(10^7)m\quad E=T_A+V_A=-2.8895(10^7)m$

$h=rv_\theta=6.871(10^6)(7618)=5.2346\times10^{10}\ m^2/s$

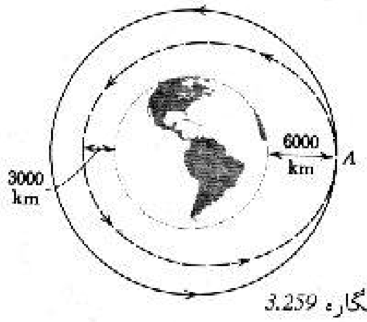
$e=\sqrt{1+(2Eh^2)/(mg^2R^4)}=0.06563$

$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\quad \cos\theta=\frac{a(1-e^2)-r}{re}$

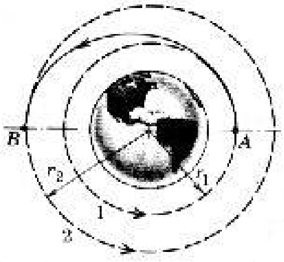
$\Rightarrow\theta=90+2.6(10^{-7})^\circ\quad \underline{\alpha=2.6(10^{-7})^\circ}$



نگاره 3.258



نگاره 3.259

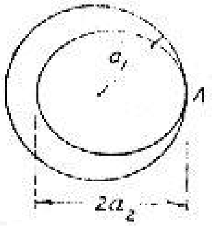


نگاره 3.261

3.259 - می‌خواهیم ماهواره $800\ kg$ از مدار دایره به بیضی بیفتد. موتور وارون $2000\ N$ چه اندازه روشن بماند؟

$Ft=m\Delta v$

$v_1=R\sqrt{g/a}=6371(10^3)\sqrt{9.825/(1237(10^3))}=5678\ m/s$



$A:\ v_A=R\sqrt{g/a_2}\sqrt{r_{min}/r_{max}}$

$r_{mn}=6371+3000=9371\ km\quad r_{max}=6371+6000=12371\ km$

$a_1=R+6000=6371+600\quad a_2=10871\ km$

$v_A=5271\ m/s\quad\Rightarrow\Delta v=5678-5271=406\ m/s$

$\Rightarrow 2000t=800(406)\Rightarrow t=162\ s$

3.260 - دماهنگ ماه برای زمین ایستا چیست؟

$\tau_f=2\pi a^{3/2}/[gR^3]^{1/2}=2\pi a^{3/2}/[Gm_o]^{1/2}\quad \tau_{nf}=(2\pi a^{3/2})/(\sqrt{G(m_o+m)})$

$\tau_f=658.67\ h$

$\tau_{nf}=654.68\ h$

www.collegeprozheh.ir

3.261 - تغییر تندی ماهواره در A با $r_1=6371+500$ km و B با $r_2=6371+1000$ km چه باشد تا ماهواره از مدار پایین به مدار بالاتر برود؟

1) $v_1=R\sqrt{g/r_1}$ 2) $v_2=R\sqrt{g/r_2}$

transfer ellipse at A: $v_1'=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_2/r_1}$

transfer ellipse at B: $v_2'=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_1/r_2}$

$$a=\frac{r_1+r_2}{2}$$

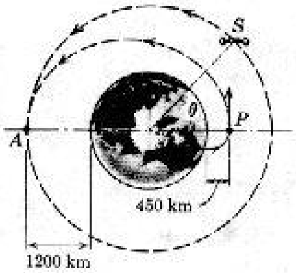
$$A:\ \Delta v_A=v_1'-v_1=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_2/r_1}-R\sqrt{g/r_1}=R\sqrt{g/r_1}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}-1\right)$$

$$B:\ \Delta v_B=v_2-v_2'=R\sqrt{g/r_2}-R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_1/r_2}=R\sqrt{g/r_2}\left(1-\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

$$\Delta v_A=6371\sqrt{\frac{9.825(10^3)}{6871}}\left(\sqrt{\frac{2(7371)}{6871+7371}}-1\right)=\underline{132.6\ \text{m/s}}$$

$$\Delta v_B=6371\sqrt{\frac{9.825(10^3)}{7371}}\left(1-\sqrt{\frac{2(6871)}{6871+7371}}\right)=\underline{130.3\ \text{m/s}}$$

3.262 - زاویه θ بین P و S چه باشد تا موشک P به جرم 800 kg بتواند در A به S با جرم 1200 kg بپیوندد؟ برای آنکه آنها هم‌تندی شوند، موتور P با نیروی 900 N چه اندازه باید روشن شود؟



نگاره 3.262

$$\tau/2=\pi a^{3/2}/(R\sqrt{g})$$

$$=\pi[7196\times10^3]^{3/2}/(6371(10^3)\sqrt{9.825})=3037\ \text{s}$$

$$a=\frac{1}{2}(2[6.371]+1200+450)=7196\ \text{km}$$

$$\text{period}=(3037)(2)\left(\frac{7571}{7196}\right)^{3/2}=6554\ \text{s}$$

$$\Rightarrow \frac{180^\circ-\theta}{360^\circ}=\frac{3037}{6554}\qquad \underline{\theta=13.2^\circ}$$

$$v_s=\frac{2\pi(7571\times10^3)}{6554}=7258\ \text{m/s}$$

$$(v_P)_A=v_{apogee}=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_{min}/r_{max}}=6371(10^3)\sqrt{\frac{9.825}{7196(10^3)}}\sqrt{\frac{6821}{7571}}$$

$$=7066\ \text{m/s}\qquad \int F\,dt=m\Delta v\ ;900t=800(7258-7066)\qquad \underline{t=170\ \text{s}}$$

www.collegeprozheh.ir

3.263 - با تندی $3200\ m/s$، موشک با چه زاویه β به زمین می‌خورد؟

$r=\sqrt{2}gR \quad \alpha=\tan^{-1}(\frac{2R}{5R})=21.8^\circ \quad v^2=2gR^2(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a})$

$B:\ 3200^2=2(9.825)6.371\times10^6\left[1/(\sqrt{29}6.371(10^6))-\frac{1}{2a}\right]$

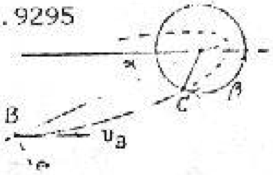
$a=3.066\times10^7\ m \quad T_B=\frac{1}{2}\,mv_B^2=\frac{1}{2}\,m(3200)^2=5.120\times10^6\ m$

$V_B=-\frac{mgR^2}{r_B}=-m\frac{(9.825)(6.371\times10^6)^2}{\sqrt{29}\,(6.371\times10^6)}=-1.162\times10^7\ m$

$E=T_B+V_B=-6.504\times10^6\ m \qquad v_\theta=3200\sin\alpha=1188.5\ m/s$

$h=rv_\theta=\sqrt{29}(6.371\times10^6)(1188.5)=4.077\times10^{10}\ kg.m^2/s$

$e=\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{mg^2R^4}}=\sqrt{1+\frac{2(-6504\ m)(4.077\times10^{10})^2}{m(9.825)^2(6.371\times10^6)^4}}=0.9295$



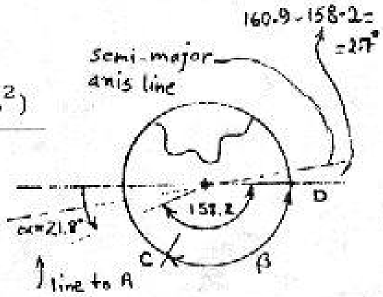
$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

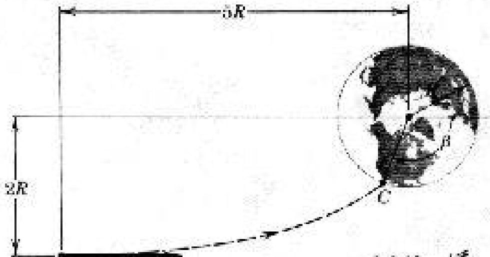
$B:\ \sqrt{29}(6.371\times10^6)=\frac{(3.066\times10^7)(1-0.9295^2)}{1+0.9295\cos\theta}$

$\theta=160.9^\circ$

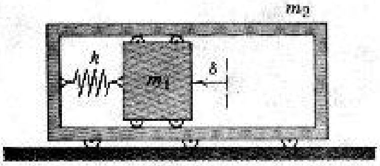
$C:\ (6.371\times10^6)=\frac{(3.066\times10^7)(1-0.9295^2)}{1+e\cos\theta}$

$\theta=111.8^\circ \quad \beta=111.8-2.7=109.1^\circ$





نگاره 3.263



نگاره 3.264

... m_1 را ... ، δ رها می‌کنیم، شتاب m_1 از دید m_2 چیست؟

www.collegeprozheh.ir

$$a_{1/2}=a_{x1}-a_{x2}=\frac{k\delta}{m_1}-(-\frac{k\delta}{m_2})$$

$$\Rightarrow a_{1/2}=a_{rel}=k\delta(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})$$

3.265 - دستور تکان را برای پرسش 3.29 هم از دید بیننده سوار بر واگن و هم از دید بیننده زمینی، بنویسید.

rel. to car: $\int_0^t Pdt=m(\dot{x}-0)$ $\quad pt=m\dot{x}$,

fixed observer: $\int_0^t Pdt=m(\dot{x}-v_0)$ $\quad pt=m(\dot{x}-v_0)$

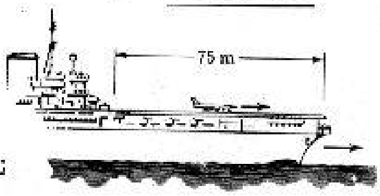
$X=x+x_0$, $\dot{x}-v_o=\dot{x} \Rightarrow pt=m\dot{x}$

3.266 - هواپیمای 3 Mg با موتور 22 kN و به یاری منجنیق، پس از 75 m با تندی 240 km/h از ناو برمی‌خیزد. نیروی پیشران منجنیق چیست؟

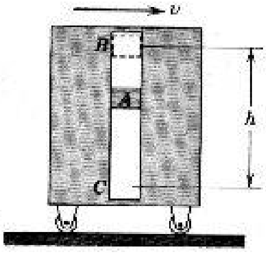
rel. to carrier $U_{rel}=\Delta T_{rel}$

$(22+P)(10^3)75=\frac{1}{2}(3)(10^3)[(240/3.6)^2-0]$

$22+P=88.9$ KN $\quad P=66.9$ KN



نگاره 3.266

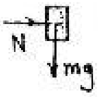


نگاره 3.267

3.267 - لغزنده A از B رها می‌شود. تندی آن در C چیست اگر، (a) جعبه با تندی $v=v_0$ حرکت می‌کند؟ (b) تندی جعبه، v_0 و شتابش a_0 باشد؟

(a) $v_o=cte \quad N=0 \quad U=\Delta T \quad mgh=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_o^2$

$v_2=(v_o^2+2gh)^{1/2}$



(b) $a_o=cte \quad N=ma_o \quad U=\Delta T \quad mgh+Nd=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_o^2$

$d=v_o t_{drop}+\frac{1}{2}a_o t_{drop}^2=v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{1}{2}a(\sqrt{\frac{2h}{g}})^2$

$\Rightarrow v_2=(v_o^2+2gh+2a_o v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}+2a_o^2h/g)^{1/2}$

www.collegeprozheh.ir

3.268 - ناویز B، 20 km جلوتر از ناویز A است و با تندی 2 km/s از دید A پیش می‌رود. اگر بخواهیم فاصله آنها 1000 km باشد، نیروی وارون F چه باشد و چه زمانی بر B بنشیند؟

$$S_{B/A}=(S_{B/A})_o+(v_{B/A})_o t+\frac{1}{2}a_{B/A}t^2$$

$$1000=20+2t+\frac{1}{2}a_{B/A}t^2 \qquad v_{B/A}=(v_{B/A})_o+a_{B/A}t$$

$$0=2+a_{B/A}\ t \Rightarrow \underline{t=980\ s}$$

$$a_{B/A}=-2.0+1(10^{-3})\ km/s=-2.0+1\ m/s$$

costant velocity frome A: $\Rightarrow Ft=m\Delta v$

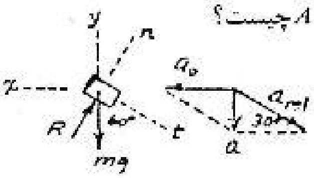
$$|F|=\frac{m\Delta v}{t}=\frac{(200)(2000)}{980}=\underline{408\ N}$$

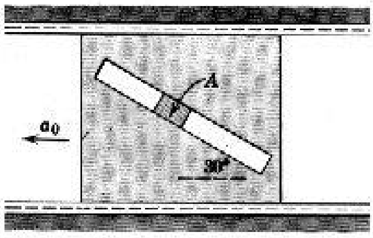
3.269 - شتاب a_0 چه باشد تا شتاب لغزنده A به جرم 2 kg رو به پایین باشد؟ نیروی واکنش شیار بر A چیست؟

$$a_o=a_{rel}\cos30^o \quad a_x=0 \Rightarrow \sum F_x=0$$

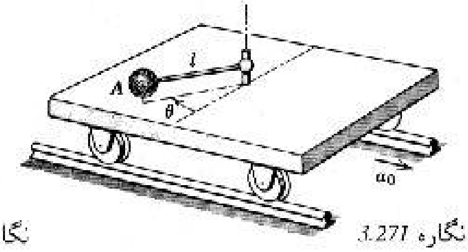
$$-R\sin30^o=0 \quad \underline{R=0} \quad \sum F_y=ma_y \quad mg=ma \quad a=g$$

$$a_o=a\sqrt{3}=g\sqrt{3}=9.81\sqrt{3}=\underline{16.99\ \frac{m}{s^2}}$$





نگاره 3.269



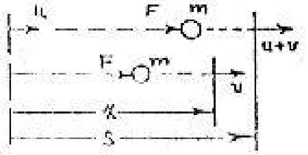
نگاره 3.271

3.270 - اگر در پرسش 3.266، ناو با تندی u حرکت بکند یا نکند، انرژی جنبشی هواپیما به هنگام برخاست، برابر $\frac{1}{2}mv^2$ یا $\frac{1}{2}m(v+u)^2$ است، چرا؟

$$dV=dT \quad Fds=m\ddot{s}\cdot ds=m\dot{s}\cdot d\dot{s}$$

$$\int_0^s Fds=\int_0^x Fds+\int_s^x Fds=\int_u^{u+v} m\dot{s}d\dot{s}$$

$$Fx+F(s-x)=\frac{1}{2}mv^2+muv \quad Fx=\frac{1}{2}mv^2 \quad F(s-x)=muv$$



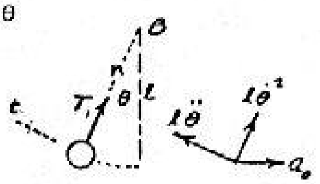
3.271 - در t=0 همه چیز ایستاده است که گاری با شتاب $a_0=1.2\ m/s^2$ به راه می‌افتد. کشش $T(\theta)$ در میله $l=0.6\ m$ با گلوله 2 kg چیست؟

www.collegeprozheh.ir

$\sum \underline{F}=m(\underline{a}_B+\underline{a}_{rel}) \quad a_B=a_o$

(t-dir): $\sum F_t=0 \Rightarrow a_t=l\ddot{\theta}-a_o\cos\theta=0 \quad \ddot{\theta}=\frac{a_o}{l}\cos\theta$

(n-dir): $\sum F_n=ma_n \quad T=m(l\dot{\theta}^2+a_o\sin\theta)$



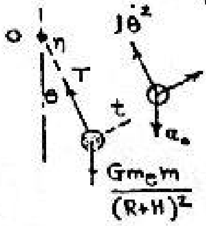
$\int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}d\dot{\theta}=\int_0^{\theta}\ddot{\theta}d\theta \quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\int_0^{\theta}\frac{a_o}{l}\cos\theta d\theta=\frac{a_o}{l}\sin\theta$

$\Rightarrow T=m(2a_o\sin\theta+a_o\sin\theta) \quad \underline{T=3ma_o\sin\theta}$

$\theta=\Pi/2 \quad T=3(2)(1.2)(1)=7.2$ N

3.272 - آونگی در ماهواره‌ای در بلندی H آویزان است. اگر آن را به اندازه θ_0 کج و رها کنیم چه می‌شود؟

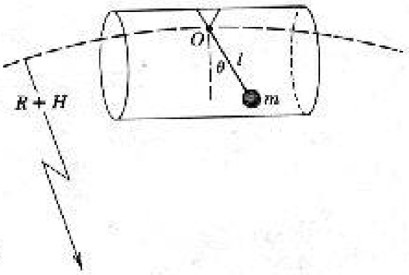
$\sum F_t=ma_t \quad -\frac{Gm_em}{(R+H)^2}\sin\theta=m(l\ddot{\theta}-a_o\sin\theta)$



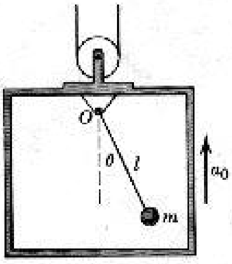
$\ddot{\theta}=\frac{1}{l}[a_o\sin\theta-\frac{Gm_em}{(R+H)^2}\sin\theta]=\frac{1}{l}[a_o-\frac{Gm_em}{(R+H)^2}]\sin\theta$

$a_o=\frac{v^2}{(R+H)}=\frac{Gm_e/(R+H)}{(R+H)}=\frac{Gm_em}{(R+H)^2} \quad \underline{\ddot{\theta}=0}$

and the pendulum dose not swing relative to the spacecroft (for l<<(R+H)).



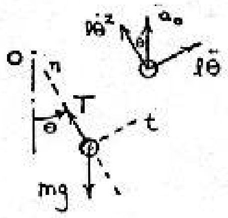
نگاره 3.272



نگاره 3.273

3.273 - آونگ از θ_0 رها می‌شود، کشش میله آن چیست؟

$\sum F_t=ma_t \quad -mg\sin\theta=m(l\ddot{\theta}+a_o\sin\theta)$



$\ddot{\theta}=-(\frac{a_o+g}{l})\sin\theta \quad \int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}d\dot{\theta}=-\int_{\theta_0}^{\theta}(\frac{a_o+g}{l})\sin\theta d\theta$

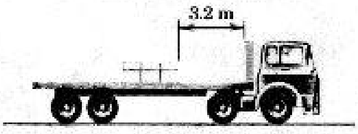
$\dot{\theta}^2=2(\frac{a_o+g}{l})(\cos\theta-\cos\theta_o) \quad \sum F_n=ma_n$

www.collegeprozheh.ir

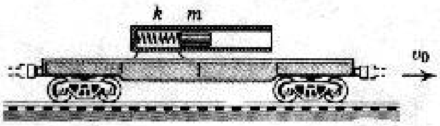
$$T-mg\cos\theta=m(l\dot{\theta}^2+a_o\cos\theta)$$
$$T=m[g(3\cos\theta-2\cos\theta_o)+a_o(3\cos\theta-2\cos\theta_o)]=$$
$$=m(g+a_o)(3\cos\theta-2\cos\theta_o)$$
$$\theta=0 \Rightarrow \underline{T_o=m(g+a_o)(3-2\cos\theta_o)}$$
$$\theta_o=\Pi/2 \Rightarrow \underline{T_o=3m(g+a_o)}$$

3.274 - کامیون با تندی 15 m/s پیش می‌رود و ترمز می‌گیرد. اگر ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده، 0.9 و ضریب اصطکاک بین بسته و کف کامیون $\mu_S=0.8$ و $\mu_K=0.7$ باشد، بسته کجا می‌ایستد یا با چه تندیی از دید کامیون به آن می‌خورد؟

$$a_r=-0.9g \quad t_{stop}=\frac{15\ m/s}{0.9(9.81\ m/s^2)}=1.699\ s$$
$$a_c=-0.7g \quad a_c/T=a_c-a_r=-0.7g-(-0.9g)=0.2g$$
$$t=t_{stop} \Rightarrow$$
$$x_{c/T}=(x_{c/r})_o+(v_{c/T})_o t_{stop}+\frac{1}{2}a_{c/T}\ t^2_{stop}=$$
$$=0+0+\frac{1}{2}(0.2g)(1.699)^2=2.83\ m$$
$$v_{c/T}=(v_{c/r})_o+a_{c/T}t_{stop}=0+(0.2g)(1.699)=3.33\ m/s$$
$$\Rightarrow v_c^2=v_{c_D}^2+2a_c(x-x_o)=(3.33)^2+2(-0.7g)(3.2-2.83)$$
$$\underline{v_c=2.46\ m/s}$$

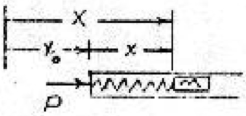


نگاره 3.274



نگاره 3.275

3.275 - گلوله m از روی واگنی با تندی v_0 با فنری به فشردگی δ پرتاب می‌شود. دستور کار و انرژی را برای بیننده زمینی و بیننده واگنی بنویسید و آنها را سازگار کنید.



$$U_r=\Delta v_e+\Delta T_r \quad 0=\Delta v_e+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$U=\Delta v_e+\Delta T \quad \int Pdx_o=\Delta v_e+\frac{1}{2}\ m(\dot{X}^2-\dot{X}_o^2)$$
$$\int Pdx_o=\int m\ddot{x}dx_o=\int m\ddot{x}v_o dt=mv_o\int_0^{\dot{x}} d(\dot{x})=mv_o\dot{x}$$
$$\frac{1}{2}\ m(\dot{X}^2-\dot{X}_o^2)=\frac{1}{2}\ m([\dot{x}+\dot{x}_o]^2-\dot{x}_o^2)=mv_o\dot{x}+\frac{1}{2}\ m\dot{x}^2$$

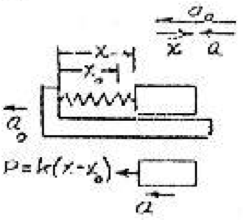
www.collegeprozheh.ir

$$\Rightarrow mv_o x = \Delta v_e + mv_o x + \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 \qquad 0 = \Delta v_e + \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2$$

3.276 - طول آزاد فنر x_0 است. اگر چارچوب با شتاب a_0 به راه افتد، بیشترین تندی m از دید چارچوب چیست؟

$$a = a_o - \ddot{x} \qquad \sum F = ma \qquad k(x - x_o) = m(a_o - \ddot{x}) \qquad \dot{x}d\dot{x} = \ddot{x}dx$$

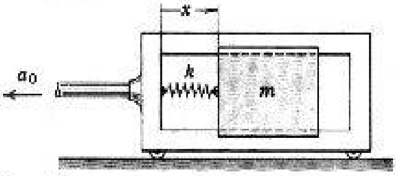
$$\Rightarrow \int_{x_o}^{x} [a_o - \frac{k}{m}(x - x_o)]dx \qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 = (a_o - \frac{k}{m}x_o)(x - x_o) - \frac{k}{2m}(x^2 - x_o^2)$$



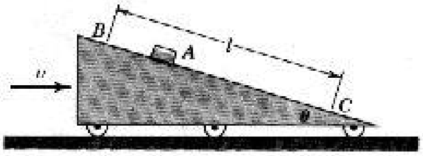
$$\frac{d(\dot{x}^2/2)}{dx} = a_o + \frac{k}{m}x_o - \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x = x_o + \frac{ma_o}{k}$$

$$(v_{rel})^2_{max} = \dot{x}^2 = 2(a_o + \frac{k}{m}x_o)(\frac{ma_o}{k}) - \frac{k}{2m}(\frac{2ma_o x_o}{k} + \frac{m^2 a_o^2}{k^2}) =$$

$$= \frac{2ma_o^2}{k} + 2x_o a_o - 2x_o a_o - \frac{ma_o^2}{k} = \frac{ma_o^2}{k} \qquad (v_{rel})_{max} = a_o\sqrt{m/k}$$



نگاره 3.276

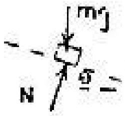


نگاره 3.277

3.277 - ماسوره A از B رها می‌شود و به پایین می‌لغزد. تندی آن در C از دید بیننده‌ای سوار بر گاری و از دید بیننده زمین چیست؟

$$U_{rel} = \Delta T_{rel} \qquad mgl\sin\theta = \frac{1}{2}\, mv_{rel}^2 - 0 \qquad v_{rel}^2 = 2gl\sin\theta$$

$$U = \Delta T \qquad mgl\sin\theta + (N\sin\theta)d = \frac{1}{2}\, mv^2 - \frac{1}{2}\, mv_o^2$$



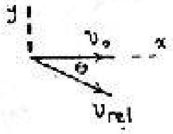
where d is the horizontal distance traveled by the block. Time to slide from B to C:

$$l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\sin\theta\; t^2 \qquad t = (\frac{2l}{g\sin\theta})^{1/2} \Rightarrow d = v_o t = v_o\sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta}}$$

$$N = mg\cos\theta \qquad v_A^2 = v_B^2 + 2gl\sin\theta + 2v_o\cos\theta\sqrt{2gl\sin\theta}$$

check :

$$\underline{v}_A = \underline{v}_o + \underline{v}_{rel} = v_o\underline{i} + \sqrt{2gl\sin\theta}(\cos\theta\underline{i} - \sin\theta\underline{j}) =$$



$$= (v_o + \sqrt{2gl\sin\theta}\cos\theta)\underline{i} - \sqrt{2gl\sin^3\theta}\;\underline{j}$$

$$v_A^2 = (v_o + \sqrt{2gl\sin\theta}\cos\theta)^2 + (2gl\sin^3\theta)$$

www.collegeprozheh.ir

3.278 - پرسش پیش را با افزودن شتاب a_0 به گاری پاسخ گویید. تندی گاری به هنگام رهایی ماسوره، v_0 است.

$U_{rel}=\Delta T_{rel}$

dose not hold in an accelration reference frame.

$U=\Delta T$: $mgl\sin\theta+(N\sin\theta)d=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_o^2$

$\sum F_y=ma_y$: $N-mg\cos\theta=ma_o\sin\theta \qquad N=mg\cos\theta+ma_o\sin\theta$

$\sum F_x=ma_x$: $mg\sin\theta=ma_x=m(a_o\cos\theta+a_{rel})$

$$a_{rel}=g\sin\theta-a_o\cos\theta$$

Time to slide from B to C :

$l=\frac{1}{2}a_{rel}t^2 \qquad t=\left(\frac{2l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}\right)^{1/2}$

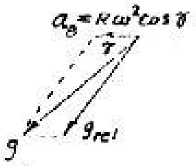
Then horizontal distance travelet by block is:

$d=v_ot+\frac{1}{2}a_ot^2 \qquad d=v_o\left(\frac{2l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}\right)^{1/2}+\frac{a_ol}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}$

$$\Rightarrow v_A^2=v_B^2+2gl\sin\theta+2\sin\theta(g\cos\theta+a_o\sin\theta)\left(v_o\sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}}+\frac{a_ol}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}\right)$$

3.279 - ذره‌ای در B بر زمین می‌افتد. شتاب گرانش g_{rel} چیست؟

$g_{rel}^2=g^2+a_B^2-2ga_B\cos\gamma=g^2\left(1+\left[\frac{a_B}{g}\right]^2-2\frac{a_B}{g}\cos\gamma\right)$



$g_{rel}=g\left[1+\frac{a_B}{g}\left(\frac{a_B}{g}-2\cos\gamma\right)\right]^{1/2} \qquad (1+x)^n=1+nx+\ldots$

$\Rightarrow g_{rel}=g\left[1+\frac{a_B}{g}\left(\frac{a_B}{2g}-\cos\gamma\right)+\ldots\right]=g+a_B\left(\frac{a_B}{2g}-\cos\gamma\right)+\ldots$

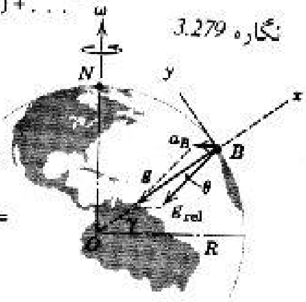
$g_{rel}=g-R\omega^2\cos^2\gamma\left(1-\frac{R\omega^2}{2g}\right)+\ldots$

$R\omega^2=6.371(10^6)(0.7292\times10^{-4})^2=0.03388\ m/s^2$

$g_{rel}=9.825-0.03388\left(1-\frac{0.03388}{2\times9.825}\right)\cos^2\gamma+\ldots=$

$=9.825-0.03382\cos^2\gamma\ m/s^2$

نگاره 3.279



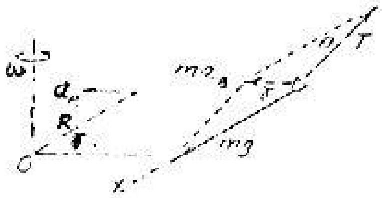
3.280 - نخ شاقول آویزان در $\gamma=30^\circ$ چه زاویه‌ای از سوی عمودی می‌گیرد؟

$a_B=R\omega^2\cos\gamma \qquad \sum \underline{F}=m(\underline{a}_B+\underline{a}_{rel}) \qquad \underline{a}_{rel}=0 \qquad \frac{T}{\sin\gamma}=\frac{ma_0}{\sin\theta}$

www.collegeprozheh.ir

$\Rightarrow \sin\theta = \dfrac{mR\omega^2 \sin 2\gamma}{2T}$ $\quad \sum F_x = ma_x \Rightarrow -T\cos\theta + mg = mR\omega^2\cos^2\gamma$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{R\omega^2}{2g} \dfrac{\sin 2\gamma}{1-(R\omega^2/g)\cos^2\gamma}$

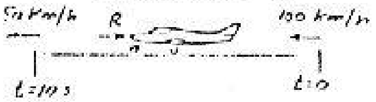


$R\omega^2 = 0.03388 \ m/s^2 \qquad \gamma = 30^\circ$

$\tan\theta = \dfrac{0.03388}{2(9.825)} \dfrac{0.866}{1-(0.03388/9.825)(3/4)} = 0.001497$

$\Rightarrow \theta = 5'$

3.281 - یک هواپیمای 1200 kg با 100 km/h فرود می‌آید و پس از 10 s به 50 km/h می‌رسد. میانگین نیروی ترمز چیست؟

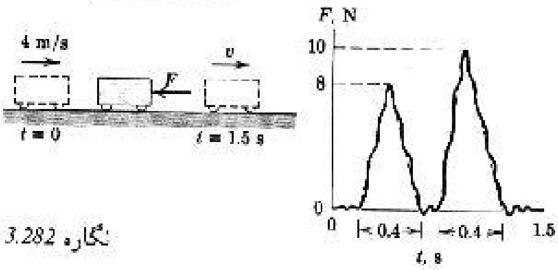


$\int_0^t R dt = m\Delta v \quad R_{av} = R = \dfrac{m\Delta v}{t} = \dfrac{1200(100-50)}{10} \dfrac{1000}{3600} \quad \Rightarrow R = 1667 \ N$

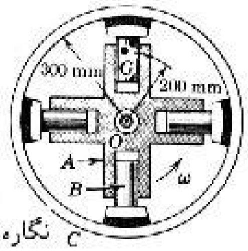
3.282 - بر گاری رونده، نیروی F می‌نشیند. تندی آن در t=1.5s چیست؟

$\int \sum F_x dt = m\Delta v_x \quad -\dfrac{1}{2}(0.4)(8) - \dfrac{1}{2}(0.4)(10) = 2(v-4)$

$v = 2.2 \ m/s$

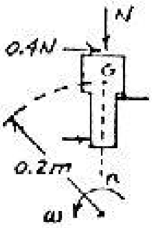


نگاره 3.282



نگاره 3.283

3.283 - چلیپای میانی با ω می‌چرخد. استوانه‌های اصطکاکی 2 kg با گرانیگاه G و ضریب اصطکاک 0.4، چرخ بیرونی را می‌چرخاند. گشتاور بیشینه گذرنده به چرخ بیرونی در چرخش 3000 rev/min چیست؟



$\omega = \dfrac{3000(2\pi)}{60} = 314.2 \ rad/s$

$\sum F_n = ma_n \quad N = 2(0.2)(314.2)^2 = 39.5(10^3) \ N$

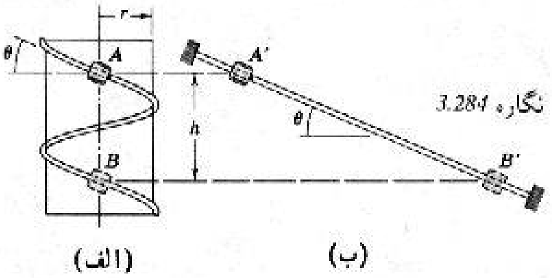
$M = 4\mu_k Nr = 4(0.4)(39.5)(10^3)(0.3) = 18.96 \ kN.m$

www.collegeprozheh.ir

3.284 - ماسوره از A و A' رها می‌شود. تندی ماسوره در B و B' چیست؟ اگر اصطکاک هم باشد تندی کدام بیشتر است؟

$$U=\Delta T \qquad mgh=\frac{1}{2}\,mv_B^2$$

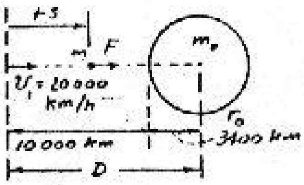
$$\Rightarrow v_B=v'_B=\sqrt{2gh}$$



نگاره 3.284

3.285 - ناویزی با تندی $20000\ km/h$ در فاصله $10000\ km$ از مریخ، یک‌راست به سوی آن می‌رود. قطر مریخ $6800\ km$ و شتاب گرانش آن $3.72\ m/s^2$ است. تندی برخورد ناویز با مریخ چیست؟

$$\sum F=ma \qquad G\frac{mm_o}{(D-s)^2}=ma \qquad s=D-r_o \qquad a=g_o=3.73\ m/s^2$$



$$\Rightarrow G\frac{m_o}{r_o^2}=g_o \qquad a=g_o\frac{r_o^2}{(D-s)^2} \qquad \int_{v_1}^{v} vdv=\int_0^s ads$$

$$\frac{1}{2}(v^2-v_1^2)=\int_0^{D-r_o} g_o\frac{r_o^2}{(D-s)^2}\,ds=g_o r_o^2\left(\frac{1}{D-s}-\frac{1}{D}\right)$$

$$\Rightarrow v^2=v_1^2+2g_o r_o^2\frac{s}{(D-s)D} \quad \text{for } s=10000\ km,$$

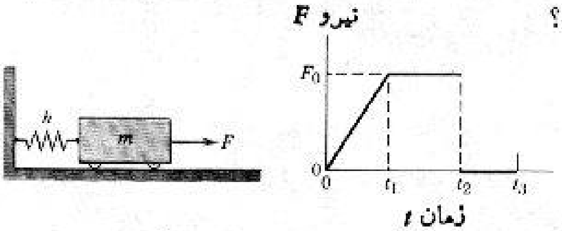
$$v^2=(20000)^2+2(3.73)\frac{(3600)^2}{1000}(3400)^2\frac{10000}{3400(13400)}=$$

$$=400(10^6)+245(10^6)=645(10^6)\ (km/h)^2$$

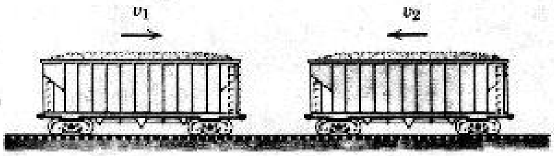
$$\Rightarrow v=25400\ km/h$$

3.286 - تندی گاری در $t=t_3$ چیست؟

$$a=-\frac{k}{m}x+\frac{F(t)}{m}$$



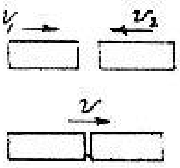
نگاره 3.286



نگاره 3.287

www.collegeprozheh.ir

3.287 - افت انرژی پس از برخورد به انرژی نخستین چیست؟



$v_1>v_2 \quad \Delta G=0 \quad mv_1-mv_2=(m+m)v \quad v=\frac{1}{2}(v_1-v_2)$

$T_{Before}=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{m}{2}(v_1^2+v_2^2)$

$T_{after}=\frac{1}{2}(m+m)v^2=m\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right)^2=\frac{m}{4}(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2)$

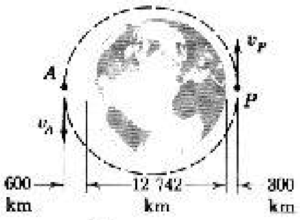
$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{(m/2)[(v_1^2+v_2^2)-(1/2)(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2)]}{(m/2)(v_1^2+v_2^2)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}=\frac{1}{2}+\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}$$

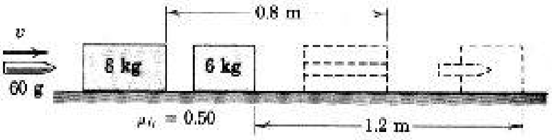
3.288 - v_A با $v_P=28137$ km/h چیست؟

$\Delta H=0$ about center of earth

$mv_Pr_P=mv_Ar_A \quad v_A=v_P\frac{r_P}{r_A} \quad v_A=28137\frac{6371+300}{6371+600}=26926$ km/h



نگاره 3.288



نگاره 3.290

3.289 - دنباله‌دار هالی در 1910 و 1986 دیده شد. اگر نشیب مدار آن، نیم برابر فاصله زمین از خورشید باشد، فرازش چیست؟

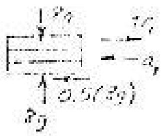
$\tau=2\pi(a^{3/2}/(R\sqrt{g})) \quad a=\left(\tau R\sqrt{g}/(2\pi)\right)^{3/2}$

$$a=\left(76(365)(24)(3600)\left(\frac{1,392,000,000}{2}\right)\sqrt{274}/(2\pi)\right)^{2/3}$$

$a=2.68(10^{12})$ m $=2.68(10^{9})$ km

$r_{max}=2a-r_{min}=2(2.68\times10^{12})-149.6\times10^{6}/2=5.37\times10^{9}$ km

3.290 - اگر گلوله، بسته‌ها را به آرایش خط‌چین درآورد، تندیش چیست؟



$F=ma \quad a_1=0.5g$

$v_1=\sqrt{2a_1s_1}=\sqrt{2(0.5\times9.81)\times0.8}=2.80$ m/s

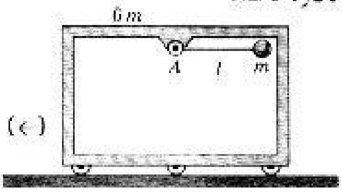
$a_2=0.5g \quad v_2=\sqrt{2a_2s_2}=\sqrt{2(0.5\times9.81)\times1.2}=3.43$ m/s

$\Delta G=0 \quad 0.060v+0=8(2.80)+(6+0.06)3.43 \quad v=720$ m/s

www.collegeprozheh.ir

3.291 - آونگ رها می‌شود. تندی m از دید دیواره در پایینترین نقطه چیست؟

نگاره 3.291



$0=6mv_A+mv_B \quad U=\Delta T \quad mgl=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}(6m)v_A^2$

$\Rightarrow \quad v_A=\sqrt{gl/21} \; (\rightarrow)$

$v_B=-6\sqrt{gl/21} \; (\leftarrow) \qquad v_{rel}=v_{B/A}=v_B-v_A=-\sqrt{\frac{7}{3}gl} \; (\leftarrow)$

3.292 - خودروی A به جرم $1800 \; kg$ به سوی خودروی ایستاده B به جرم $900 \; kg$ می‌رود و $15 \; m$ مانده به آن با ضریب اصطکاک 0.9 ترمز می‌گیرد و پس از برخورد، $15 \; m$ دیگر نیز می‌لغزد. خودروی B نیز پس از برخورد، $30 \; m$ می‌لغزد و در پایان به آرایش نشان‌داده می‌رسد. آیا خودروی A پیش از ترمزگرفتن، از $90 \; km/h$ بیشتر بوده‌است؟

$U=\Delta T \qquad -\mu_k mgd=0-\frac{1}{2}mv'^2 \qquad v'=\sqrt{2\mu_k gd}$

$A: \; v'_A=\sqrt{2(0.9)(9.81)(15)} \; =16.27 \; m/s$

$B: \; v'_B=\sqrt{2(0.9)(9.81)(30)} \; =23.02 \; m/s$

$m_Av_A+m_Bv_B=m_Av'_A+m_Bv'_B$

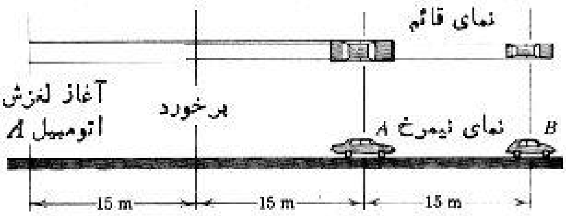
$1800v_A+0=1800(16.27)+900(23.02)) \qquad v_A=27.78 \; m/s$

$U=\Delta T \qquad -\mu_k mgd=\frac{1}{2}m(v_A^2-v_{AO}^2)$

$-0.9(9.81)(15) =\frac{1}{2}(27.78^2-v_{AO}^2)$

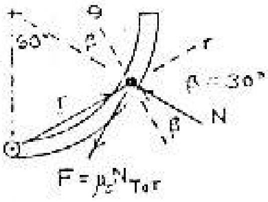
$v_{AO}=32.2 \; m/s \; =115.91 \; km/h$

نگاره 3.292



3.293 - ذره P به جرم $0.5 \; kg$ با ضریب اصطکاک 0.8 در لوله‌ای است که با شتاب $2 \; rad/s^2$ از $t=0$ به راه می‌افتد. ذره کی می‌لغزد؟

$N_z=mg \; \perp \; N_{TOT}=\sqrt{N^2+N_z^2}=\sqrt{N^2+(mg)^2}$



$\sum F_r=mg_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)-N\sin30-\mu_s\sqrt{N^2+[0.5\times9.81]^2}\cos30=$

$=-(0.5)(0.75)(2)^2t^2 \qquad \sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})$

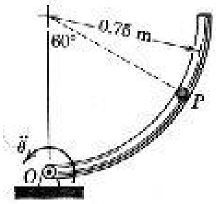
$N\cos30^\circ-\mu_s\sqrt{N^2+(0.5\times9.81)^2}\sin30^\circ=(0.5)(0.75)(2)$

$\Rightarrow N=3.71 \; N \qquad t=2.02 \; s$

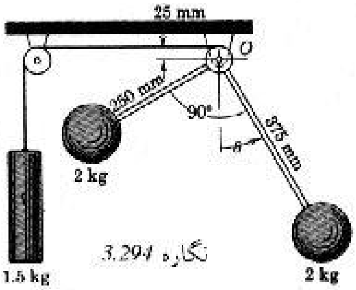
3.294 - دستگاه از $\theta=0$ رها می‌شود. تندی استوانه در $\theta=30^\circ$ چیست؟

$U=3(1+\theta)+4(10\sin\theta)-4(15-15\cos\theta)$

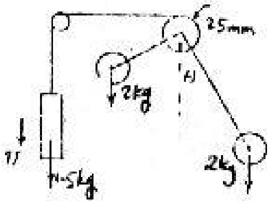
www.collegeprozheh.ir



نگاره 3.293



نگاره 3.294



$U = 0.250\sin 30 + (0.375\cos 30 - 0.375) + (\pi/12)(0.025)$

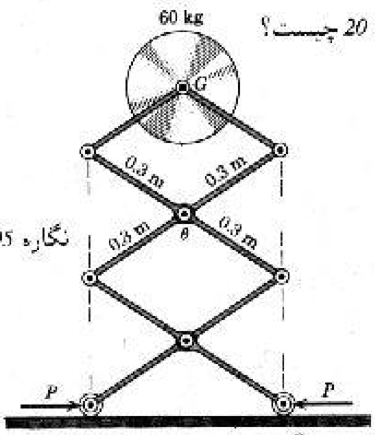
$U = 0.125 - 0.050 + 0.007 = 0.082$ N.m

$\Delta T = \frac{1}{2}\ [2(0.375)v^2 + 2(0.250)v^2 + 1.5v^2] = 1.375\ v^2$

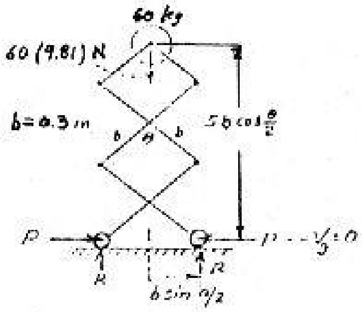
$U = \Delta T \Rightarrow 0.082 = 1.375v^2$

$v = 59.63$ mm/s

3.295 - دستگاه با نیروی P از $\theta=120^\circ$ به راه می‌افتد. اگر استوانه با 3 m/s از $\theta=60^\circ$ بگذرد، P چیست؟ واکنش زیر هر غلتک در شتاب استوانه $20\ m/s^2$ چیست؟



نگاره 3.295



$U = \Delta v_g + \Delta T \quad \theta_1 = 120^\circ \quad v_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad v_2 = 3$ m/s

$U = 2pb(\sin\frac{\theta_1}{2} - \sin\frac{\theta_2}{2}) = 0.6p(\sin 60 - \sin 30) = 0.2196p$ J

$\Delta v_g = mg\Delta h = mg(5b)(\cos\frac{\theta_1}{2} - \cos\frac{\theta_2}{2}) =$

$= 60(9.81)(1.5)(\cos 60 - \cos 30) = 323.2$ J

$\Delta T = \frac{1}{2}60(3)^2 - 0 = 270$ J $\quad \Rightarrow 0.2196p = 323.2 + 270$

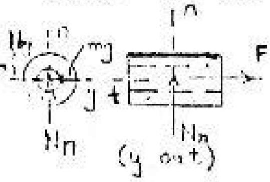
$p = \frac{323.2 + 270}{0.2196} = 2701$ N $\quad$ p=2.70 kN

$\sum F = ma \quad 2R - 60(9.81) = 60(20) \quad R = 894$ N

www.collegeprozheh.ir

3.296 - ماسوره C با ضریب اصطکاک 0.6 و تندی $3\ m/s$ از A می‌گذرد. شتاب کندشونده a_t در A برای هر دو ماسوره چیست؟

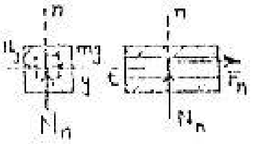
(a) $\sum F_y=0 \quad N_y=mg \quad \sum F_n=ma_n=mv^2/\rho \quad N_n=mv^2/\rho$



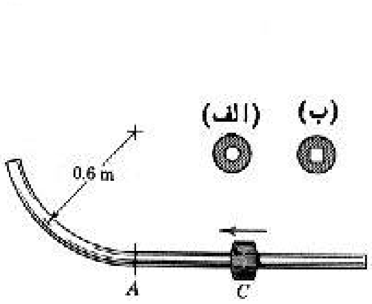
$N_{TOT}=\sqrt{N_y^2+N_n^2}=m\sqrt{g^2+v^4/\rho^2}=\mu_k N_{TOT}=\mu_k m\sqrt{g^2+v^4/\rho^2}$

$\sum F_t=ma_t \quad -\mu_k m\sqrt{g^2+v^4/\rho^2}=ma_t \quad \underline{a_t=-10.75\ m/s^2}$

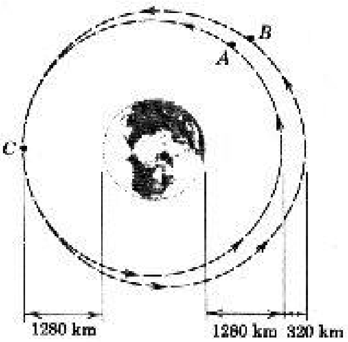
$N_y=mg \quad N_n=mv^2/\rho \quad F_y=\mu_k N_y=\mu_k mg \quad F_n=\mu_k N_n=\mu_k mv^2/\rho$



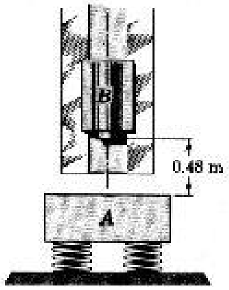
$a_t=-\frac{F_y+F_n}{m}=-\mu_k g-\mu_k v^2/\rho=\underline{-14.9\ m/s^2}$



نگاره 3.296



نگاره 3.297



نگاره 3.298

3.297 - ماهواره A و B در C به هم می‌پیوندد. بلندی فراز مدار پایانی چیست؟

$v_A=R\sqrt{g/r}=6376000\sqrt{9.81/(6376000+1280000)}=7217.4\ m/s$

$v_B=R\sqrt{g/a}\sqrt{r_{max}/r_{min}}$

$=6376000\sqrt{9.81/\left[\frac{(2(6376000)+2(1280000)+320000]}{2}\right.}\times$

$\sqrt{7976000/7656000}=7290.9\ m/s$

$m_A v_A+m_B v_B=(m_A+m_B)v_c \quad m_A=m_B\ ,$

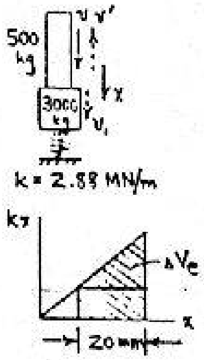
$v_c=\frac{1}{2}(v_A+v_B)=7254.2\ m/s \qquad v_p=R\sqrt{g/a}\sqrt{r_{max}/r_{min}}$

$v_p=v_c \quad : \quad r_{max}=\frac{r_{min}}{(2gR^2)/(v_p^2 r_{min})-1}=7814082.2\ m$

$h_{max}=r_{max}-R=7814082.2-6376000=\underline{1438082\ m=1438\ km}$

www.collegeprozheh.ir

3.298 - سندان A به جرم $3\ Mg$ بر چهار فنر به سختی $2.88\ MN/m$ سوار است. چکش $500\ kg$ بر سندان می‌افتد و آن را $20\ mm$ پایین می‌راند. جهندگی e چیست و چکش تا چه بلندی بازمی‌گردد؟



$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.98)}=3.07\ m/s$

$\Delta T+\Delta V_e+\Delta V_g=0$

$(0-\frac{1}{2}3000v_1^2)+\frac{1}{2}2.88\times10^6(0.020)^2+3000(9.81)(0.020)+$

$-\ 3000(9.81)(0.020)=0 \quad v_1=0.620\ m/s$

$\Delta G_x=0 \quad 500(3.07)+0=3000(0.620)-500v'$

$v'=0.649\ m/s \quad v'=\sqrt{2gh}$

$h=(0.649)/(2\times9.81)=0.0215\ m$ or $\underline{h=21.5\ mm}$

$e=(0.620+0.649)/3.07=\underline{0.414}$

3.299 - فشردگی فنر چه باشد تا گوی به سوراخ E بیفتد؟

D-E: $y=y_0+v_{y_0}t-\frac{1}{2}gt^2 \quad -\rho=\frac{1}{2}gt^2 \quad t=\sqrt{2\rho/g}$

$x=x_0+v_{x_0}+t \quad d=v_D\sqrt{2\rho/g} \quad v_D=d\sqrt{g/2\rho}$

A-D: $U=\Delta T \quad \frac{1}{2}k\delta^2-\mu_k mg\rho\ -mg\rho=\frac{1}{2}\ m(d^2\ \frac{g}{2\rho})-0$

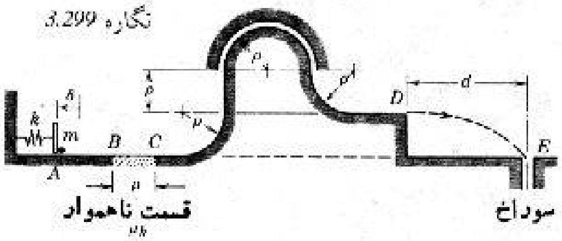
$\delta=\sqrt{mg/k}\ \sqrt{(d^2/2\rho\ +2\rho(1+\mu_k)}$

But speed at top of hill must be ≥ 0 :

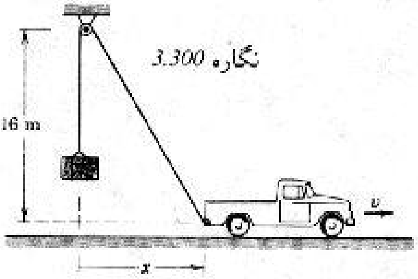
$U=\Delta T \quad \frac{1}{2}\ k\delta^2\ -\mu_k mg\rho\ -3mg\rho=\frac{1}{2}\ mv^2\ -0\ \geq0$

$\Rightarrow\ \delta\ \geq\ \sqrt{\frac{2mg\rho}{k}\ (3+\mu_k)}$

$(mg/k)(d^2/(2\rho)+2\rho[1+\mu_k])\geq\frac{2mg\rho}{k}(3+\mu_k) \qquad d\geq2\sqrt{2}\ \rho$



نگاره 3.299



نگاره 3.300

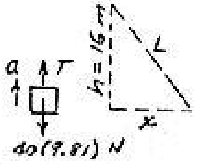
3.300 - خودرو در $x=12\ m$ با تندی $5\ m/s$ پیش می‌رود. کشش ریسمان بسته به وزنه $400\ kg$

www.collegeprozheh.ir

چیست؟ $a=\ddot{L}\quad L^2=x^2+h^2\quad 2L\dot{L}=2x\dot{x}\quad L\dot{L}=x\dot{x}\quad L\ddot{L}+\dot{L}^2=x\ddot{x}+\dot{x}^2\quad \ddot{x}=0$

$$a=\ddot{L}=(\dot{x}^2-\dot{L}^2)/L=(\dot{x}^2-(x^2/L^2)\dot{x}^2)/L=\frac{L^2-x^2}{L^3}\dot{x}^2=\frac{h^2v^2}{L^3}$$

$x=12\ \text{m}\quad h=16\ \text{m}\quad L=20\ \text{m}\quad \dot{x}=v=5\ \text{m/s}$

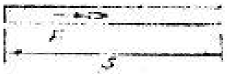


$$a=\frac{16^2(5^2)}{20^3}=0.80\ \text{m/s}^2$$

$\sum F=ma\quad T-40(9.81)=40(0.80)\quad \underline{T=424\ \text{N}}$

3.301 - انرژی جنبشی گلوله‌ای که با تندی v از تفنگ ایستاده و تفنگی بر خودرویی با تندی u، برابر $mv^2/2$ و $m(v+u)^2/2$ است. پاره muv در انرژی جنبشی دوم چیست؟

$$\int Fds=F_{av}s=\frac{1}{2}mv^2\qquad \int_0^{s+\delta}Fds=F_{av}(s+\delta)=\frac{1}{2}mv^2+F_{av}\delta$$



$\delta=ut\quad F_{av}=ma_{av}\Rightarrow F_{av}\delta=ma_{av}\quad ut=muv$

3.302 - ماهواره $700\ kg$ باید از B موشکی را به اندازه $t=90\ s$ روشن شود تا به مدار BC بیفتد. موشک در میانه از کار می‌افتد و مداری با فراز $1125\ km$ به دست می‌آید. زمان کار موشک چه بوده است؟

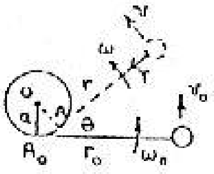
$$\Delta v_A=R\sqrt{g/r_1}\left(\sqrt{2r_2/(r_1+r_2)}-1\right)$$

$$(\Delta v_A)_n=6376000\sqrt{\frac{9.81}{6376000+275000}}\times$$
$$\left(\sqrt{\frac{2(6376000+35900000)}{(6376000+275000)+6376000+35900000}}-1\right)=966.2\ \text{m/s}$$

$$(\Delta v_A)_a=6376000\sqrt{\frac{9.81}{(6376000+275000)}}\times$$
$$\left(\sqrt{\frac{2(1000)(6376+35900)}{1000(6376+275)+1000(6376+35900)}}-1\right)=2436\ \text{m/s}$$

$$\frac{(\Delta v_A)_a}{(\Delta v_A)_n}=\frac{t'}{t}\qquad t'=\frac{(\Delta v_A)_a}{(\Delta v_A)_n}t=\frac{755}{7997}(90)=\underline{8.50\ \text{s}}$$

3.303 - ω و کشش T در v چیست؟



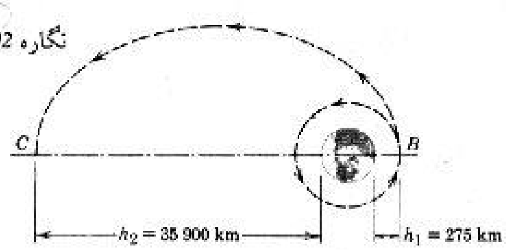
$$\frac{1}{2}m(r_o\omega_o)^2=\frac{1}{2}m(r\omega)^2\qquad \omega=\frac{r_o}{r}\omega_o=\frac{r_o}{r_o-a\theta}\omega_o\qquad \underline{\omega=\omega_o/(1-\frac{a}{r_o}\theta)}$$

$$\sum M_o=\dot{H}_o\qquad -Ta=\frac{d}{dt}(mvr)=mv\dot{r}\qquad v=\text{costant}$$

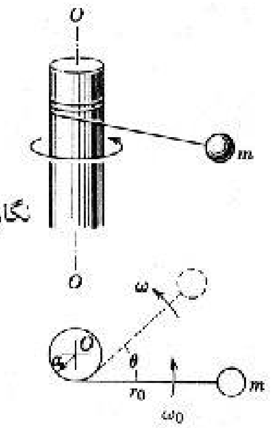
www.collegeprozheh.ir

$$\dot r=\frac{d}{dt}(r_o-a\theta)=-a\dot\theta=-a\omega \Rightarrow -Ta=mv(-a\omega)$$

$$T=mv\omega \quad \underline{T=mr_o\omega_o\omega} \quad v=v_o=r_o\omega_o$$



نگاره 3.302

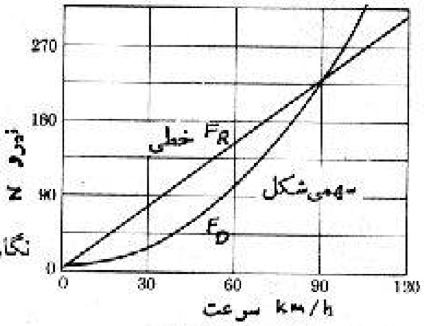


نگاره 3.303

3.304 - نیروی برا (F_D) و اصطکاک (F_R) برای خودروی kg 1000 با تندی تغییر می‌کند. (a) توان خودرو برای تندی ثابت km/h 45 و km/h 90 چیست؟ (b) زمان t و مسیر s برای رسیدن از تندی km/h 90 به km/h 5 چیست؟

$$\begin{cases} F_R=-k_1 v & k_1=225(3.6)/90=9 \ \text{N.s/m} \\ F_D=-k_2^2 v^2 & k_2=225(3.6^2)/90^2=0.36 \ \text{N.s}^2/\text{m}^2 \end{cases}$$

(a)
$$P_{45}=Fv=9\times45/3.6+.36(45/3.6)^2=112.5+56.25=168.75 \ \text{W}$$
$$P_{90}=Fv=9\times90/3.6+0.36(90/3.6)^2=225+225=450 \ \text{W}$$



نگاره 3.304

(b) $k_1 v-k_2 v^2=m\frac{dv}{dt}$

$$\int_0^t dt=-m\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v(k_1+k_2v)}\, t=-\frac{m}{k_1}\ln\left(\frac{v_2(k_1+k_2v_1)}{v_1(k_1+k_2v_2)}\right)$$

$$t=-\frac{1000}{9}\ln\left(\frac{1.39(9+0.36\times25)}{25(9+0.36\times1.39)}\right)=\underline{250 \ \text{s}}$$

$$k_1v-k_2v^2=mv\frac{dv}{ds} \qquad \int_0^s ds=-m\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{(k_1+k_2v)}$$

$$S=-\frac{m}{k_2}\ln(k_1+k_2v)\Big|_{v_1}^{v_2} \qquad S=-\frac{m}{k_2}\ln\left(\frac{(k_1+k_2v_2)}{(k_1+k_2v_1)}\right)=\underline{1775 \ \text{m}}$$

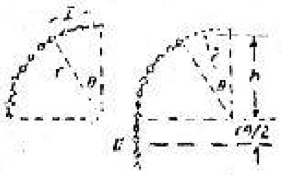
www.collegeprozheh.ir

3.305 - زنجیر با چگالی ρ از $\theta=0$ رها می‌شود. (a) شتاب مماسی $a_t(\theta)$ چیست؟ (b) کشش T در زنجیر در $\beta=v$ تا $\beta=\pi/2$ چیست؟ (c) $v(\theta)$ چیست؟

Δv_g =difference in potential energy between I, II

$\Delta v_g = -\rho g r\theta(h + r\theta/2)$

$h = \bar{r}\cos\frac{\theta}{2} = r\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}\cos\theta/2 = \frac{r}{\theta}\sin\theta$



$\Rightarrow \Delta v_g = -\rho g r^2(\sin\theta + \theta^2/2)$

$\Delta T + \Delta v_g = 0 \; ; \frac{1}{2}\rho\frac{\Pi r}{2}v^2 = \rho g r^2(\sin\theta + \theta^2/2)$

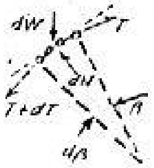
$v = r\dot{\theta} = 2\sqrt{(gr/\Pi)(\sin\theta + \theta^2/2)}$

$\frac{d}{dt}[v^2] = 2v\dot{v} = 2r\dot{\theta}a_t = (4gr/\Pi)(\dot{\theta}\cos\theta + \theta\dot{\theta})$

$a_t = (2g/\Pi)(\cos\theta + \theta) \qquad \sum F_t = ma_t$

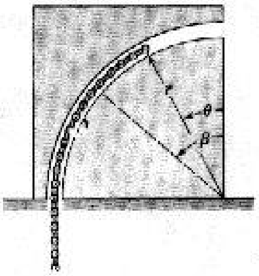
$\Rightarrow (T+dT)\cos(d\beta/2) - T\cos(d\beta/2) + \rho g r d\beta \sin\beta = \rho r d\beta a_t$

$dT = \rho g r[\frac{2}{\Pi}(\cos\theta + \theta) - \sin\beta]d\beta$

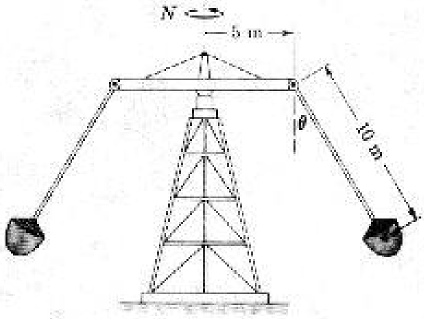


$\int_0^T dT = \rho g r\int_0^\beta [\frac{2}{\Pi}(\cos\theta + \theta) - \sin\beta]d\beta$

$dw = \rho g r d\beta \quad , T = \rho g r[\frac{2}{\Pi}(\cos\theta + \theta)(\beta - \theta) + \cos\beta - \cos\theta]$

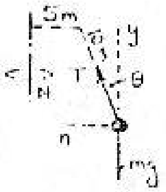


نگاره 3.305



نگاره 3.306

3.306 - زاویه θ برای $0 \le N \le 12$ (N) چگونه است؟



$\sum F_y = 0 \quad T\cos\theta - mg = 0 \quad (1)$

$\sum F_n = ma_n \quad T\sin\theta = mr\omega^2 = m(5 + 10\sin\theta)\omega^2 \quad (2)$

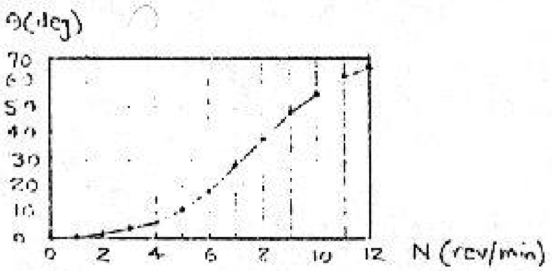
$\omega = N(\Pi/30) \quad (3)$

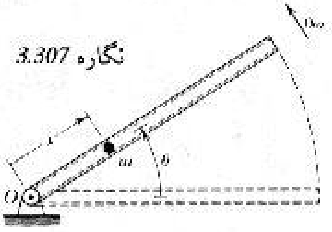
www.collegeprozheh.ir

$(1): T=\frac{mg}{\cos\theta}$, $(2): \frac{mg\sin}{\cos\theta}=m[5\omega^2+10\sin\theta\ \omega^2]$

$(3): g\tan\theta-[10(N\pi/30)^2]\sin\theta-5(N\pi/30)^2=0$

Use newton's method to obtain θ over the specified range of N.





نگاره 3.307

3.307 - گلوله m از $r=0$ و $\theta=0$ با چرخش $\omega_0=0.5$ rad/s $l=1$ m به راه می‌افتد. r و θ به هنگام بیرون افتادن چیست؟

$r=\frac{g}{4\omega_0^2}(-e^{-\theta}+e^{\theta}-2\sin\theta)$ $r=l=1$ m $\omega_0=0.5$ rad/s

$1=9.81(-e^{-\theta}+e^{\theta}-2\sin\theta)$ $f(\theta)=-e^{-\theta}+e^{\theta}-2\sin\theta-\frac{1}{9.81}=0$

$f'(\theta)=e^{-\theta}+e^{\theta}-2\cos\theta$ $f(\theta)=0 \Rightarrow \theta=0.5347$ rad $=30.6^\circ$

$\theta=\omega_0 t$ $t=\frac{0.5347}{0.5}=1.069$ s

3.308 - دستگاه از $\theta=60^\circ$ با فنر آزاد رها می‌شود. $v(\theta)$ چگونه است؟ (a) تندی بیشینه چیست و در چه θ رخ می‌دهد؟ (b) بیشینه θ چیست؟

$\overline{AB}^2=2(0.375)^2+2(0.375)^2\cos\theta$ $\overline{AB}=0.375\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

$\overline{AB}-0.375=\delta$ $\Delta V_e=\frac{1}{2}k\delta^2=\frac{1.1}{2}1[0.375(\sqrt{2(1-\cos\theta)}-1)]^2$

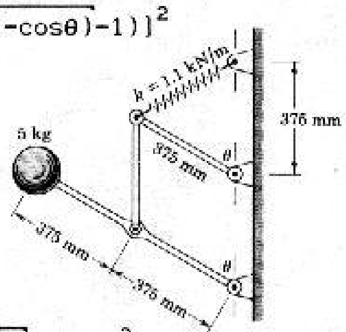
$=77.34(3-2\cos\theta-2\sqrt{2(1-\cos\theta)})$

$=-18.39+36.78\cos\theta$

$\Delta V_g=-5(9.81)(0.75)(\cos60^\circ-\cos\theta)$

$\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0$

$\frac{1}{2}(5)U^2=$



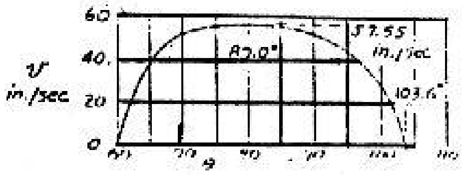
نگاره 3.308

$=18.39-36.78\cos\theta-232.2+154.7\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ $(m/s)^2$

$\theta>60^\circ \Rightarrow$ (a): $U_{max}=1.515$ m/s $\theta=82^\circ$

www.collegeprozheh.ir

(b): $\underline{\theta_{max}=108.6^\circ}$

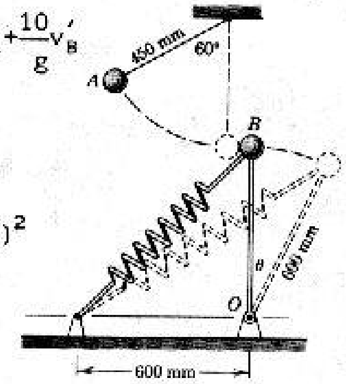


3.309 - گلوله A به جرم 9 kg از 60° رها می‌شود و به گلوله B به جرم 4.5 kg می‌خورد. با جهندگی 0.75 و فنر 1.5 kN/m بیشینه θ چیست؟

I: $U=\Delta T \quad 20(18/12)(1-\cos 60^\circ)=\frac{1}{2}\frac{20}{32.2}v_A^2-0$

$v_A=6.95$ ft/sec

نگاره 3.309



II: $m_Av_A+m_Bv_B=m_Av_A'+m_Bv_B' \quad \frac{20}{g}(6.95)+0=\frac{20}{g}v_A'+\frac{10}{g}v_B'$

$v_B'-v_A'=e(v_A-v_B)\ : v_B'-v_A'=0.75(6.95-0)$

$\Rightarrow v_B'=8.108$ ft/sec

III: $U=\Delta T$

$10(2)(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}k(x_1^2-x_2^2)=0-\frac{1}{2}\frac{10}{32.2}(8.108)^2$

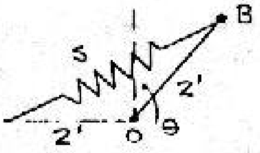
$s^2=2^2+2^2-2(2)(2)\cos(\theta+90^\circ)=8+8\sin\theta$

$x_2=s-2\sqrt{2} \quad x_2=(8+8\sin\theta)^{1/2}-2\sqrt{2}$

$x_2^2=8(2+\sin\theta-2\sqrt{1+\sin\theta})$

$\Rightarrow 20(1-\cos\theta)-\frac{1}{2}(100)(8)(2+\sin\theta-2\sqrt{1+\sin\theta})=$

$=\frac{1}{2}\frac{10}{32.2}(8.108)^2$



$\Rightarrow -769.8-20\cos\theta-400\sin\theta+800\sqrt{1+\sin\theta}=0$

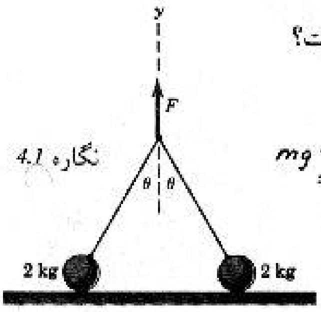
$\theta=21.7^\circ$

www.collegeprozheh.ir

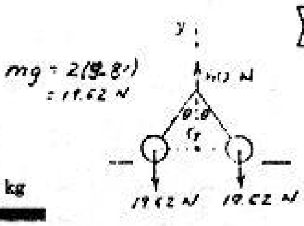
فرگرد چهار

دینامیک ذره‌ها

Kinemaics of Systems of Particles



نگاره 4.1



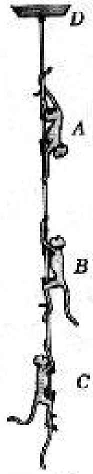
4.1 - اگر $F=60\ N$ باشد، شتاب آغازین گلوله‌ها در سوی y چیست؟

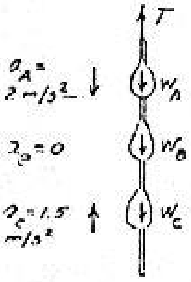
$$\sum F_y = m\dot{a}_y \qquad 60-2(19.62)=4\bar{a}_y$$

$$mg=2(9.81)=19.62\ N$$

$$a_y=\bar{a}_y=5.19\ in./sec^2$$

4.2 - میمونهای A و B و C، 10 و 15 و $8\ kg$ جرم دارند. اگر A با شتاب $2\ m/s^2$ پایین‌آید و C با شتاب $1.5\ m/s^2$ بالا رود و B نیز با سرعت ثابت $0.8\ m/s$ بالا رود، کشش ریسمان چیست؟





$$W_A=10(9.81)=98.1\ N$$

$$W_B=15(9.81)=147.2\ N$$

$$W_C=8(9.81)=78.5\ N$$

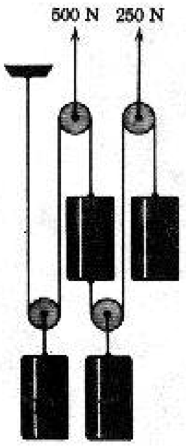
$$\sum F=\sum m_i a_i$$

$$T-(9.81+147.2+78.5)=10(-2)+15(0)+8(1.5)$$

$$T-323.7=-8 \qquad T=316\ N$$

نگاره 4.2

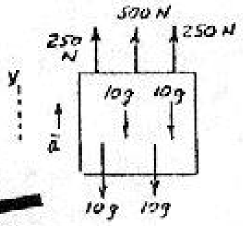
www.collegeprozheh.ir

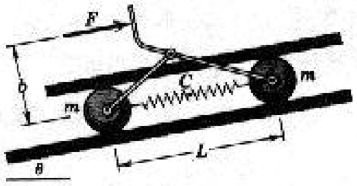


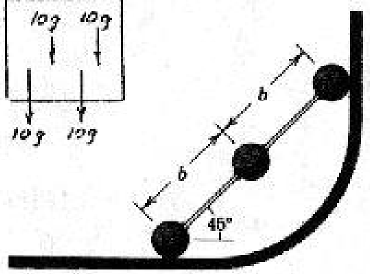
4.3 - شتاب گرانیگاه دستگاه نشان‌داده چیست؟

$\sum F_y = m\bar{a}_y \quad 500+250++250-40(9.81)=40\bar{a} \quad 40\bar{a}=1000-392$

$\bar{a}=15.19 \ m/s^2$

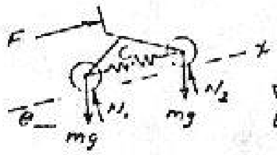






نگاره 4.3 نگاره 4.4 نگاره 4.5

4.4 - شتاب نقطه C، مرکز فنر چیست؟



$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad a_c=\bar{a}_x \quad F-2mg\sin\theta=2ma_c \quad \underline{a_c=F/2m-g\sin\theta}$

4.5 - گوی‌های چسبیده به میله، از آرایش نشان‌داده رها می‌شود. تندی گویها، هنگامی که میله بر روی سطح افقی می‌لغزد، چیست؟

$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad \Delta T=3(mv^2/2)-0=3mv^2/2$

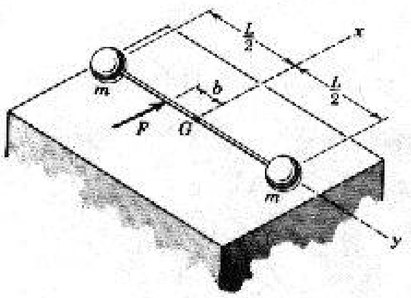
$\Delta V_g=0-mgb/\sqrt{2}-mg(2b)/\sqrt{2}=-3bmg/\sqrt{2}$

$\Rightarrow 3mv^2/2-3bmg/\sqrt{2}=0 \quad v^2=bg\sqrt{2} \quad v=\sqrt{bg\sqrt{2}}$

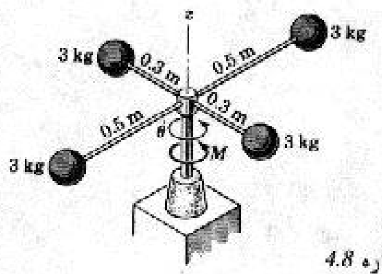
4.7 - میله سبک با دو گلوله سنگین، به ناگهان با نیروی نشان‌داده F به راه می‌افتد. الف) شتاب گرانیگاه G، و ب) شتاب زاویه‌ای میله به گرد G، چیست؟

(a): $\sum F_x = m\bar{a}_x \quad F=2m\bar{a} \quad \underline{\bar{a}=F/2m}$ (b): $H_G=2m(L/2)^2\dot{\theta} \quad \dot{H}_G=mL^2\ddot{\theta}/2$

$\sum M_G=\dot{H}_G \quad Fb=mL^2\ddot{\theta}/2 \quad \underline{\ddot{\theta}=2Fb/mL^2}$



نگاره 4.7



نگاره 4.8

www.collegeprozheh.ir

4.8 - چلیپای نشان‌داده، با تندی 20 rad/s به گرد z در چرخش بود که ناگهان، گشتاور $M=30\ N$ در سوی وارون بر آن نشست. چه زمانی تندی زاویه‌ای چلیپا به 20 rad/s در سوی M خواهد رسید؟

$$\int_0^t M_z dt = H_{z_2} - H_{z_1} \qquad H_z = \sum m_i r_i (r_i \dot\theta)$$

$$H_z = 2(3)(0.3)^2\dot\theta + 2(3)(0.5)^2\dot\theta = 2.04\dot\theta$$

$$\Rightarrow 30t = 2.04(20-(-20)) = 81.6 \qquad \underline{t = 2.72\ s}$$

4.9 - واگنهای نشان‌داده، پس از برخورد، به یکدیگر جفت می‌شود. جرم واگنهای A و B و C، 65 و 50 و 75 Mg است. تندی آنها پس از جفت‌شدن چیست و چه اندازه انرژی از بین می‌رود؟

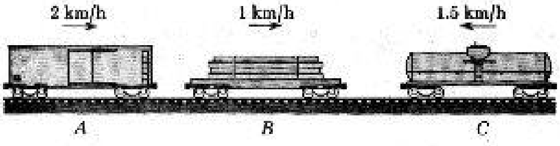
$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta G_x = 0$$

$$1000[65(2)+50(1)-75(1.5)] = 1000(65+50+75)v$$

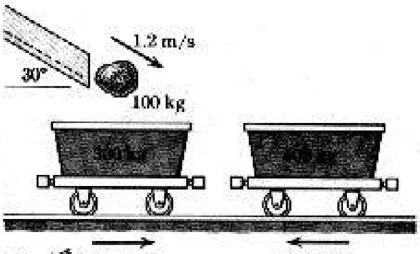
$$\underline{v = 0.355\ km/h}$$

$$(T_i - T_t)/T_i \times 100 = 100(1 - T_t/T_i) =$$

$$= 100(1 - 47.96/957.5) = \underline{95.0\%}$$



نگاره 4.9



نگاره 4.10

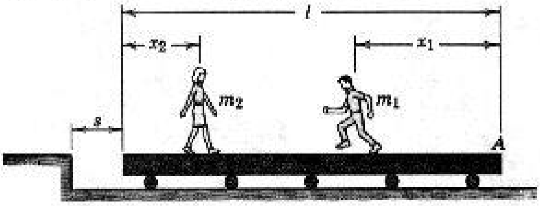
4.10 - گاریهای نشان‌داده، پس از برخورد، به هم جفت می‌شود. به هنگام برخورد، سنگی به درون گاری دست چپ می‌افتد. تندی واگنها را پس از افتادن سنگ و جفت‌شدن آنها، بیابید. آیا اگر واگنها پیش از افتادن سنگ، جفت شود، تندی پایانی آنها چیز دیگری خواهد شد؟

$$\Delta G_x = 0 \ \Rightarrow$$

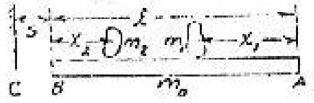
$$[300(0.6)+100(1.2\cos 30)-400(0.3) = (300+400+100)v$$

$$163.923 = 800v \qquad \underline{v = 0.205\ m/s}$$

4.11 - پیش از راه افتادن مرد و زن، $s=0$ بوده است. هنگامی که آنها به هم می‌رسند، اندازه s چگونه از روی x_1 پیدا می‌شود؟



نگاره 4.11



www.collegeprozheh.ir

$$\sum m_i X_i = \text{const.}$$

$$m_1 l + m_2(0) + m_o l/2 = m_1(s + l - x_1) + m_2(s + x_2) + m_o(l/2 + s)$$

$$\Rightarrow s = (m_1 X_1 - m_2 X_2)/(m_o + m_1 + m_2)$$

$$X_2 = l - X_1 \Rightarrow \underline{s = ((m_1 + m_2)X_1 - m_2 l)/(m_o + m_1 + m_2)}$$

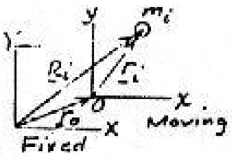
4.12 - اگر در پرسش پیشین، مرد با تندی $\dot{x}_1$ بدود و زن با تندی $\dot{x}_2$ راه رود، $\dot{s}$ چگونه پیدا می‌شود؟

$$\Delta G = 0 \quad 0 = m_o\dot{s} + m_2(\dot{X}_2 + \dot{s}) - m_1(\dot{X}_1 - \dot{s})$$

$$\dot{s}(m_o + m_1 + m_2) = m_1\dot{X}_1 - m_2\dot{X}_2 \quad \dot{s} = (m_1\dot{X}_1 - m_2\dot{X}_2)/(m_o + m_1 + m_2)$$

4.13 - نشان دهید که اندازه حرکت دستگاهی به جرم m در چارچوب لخت، از دستور زیر به دست می‌آید. که در آن، $\vec{G}_{rel}$ اندازه حرکت دستگاه در چارچوبی است که با تندی $\vec{v}_0$ حرکت می‌کند.

$$\vec{G} = \vec{G}_{rel} + m\vec{v}_0$$



$$\dot{\underline{r}}_o = v_o \quad \underline{G} = \sum m_i \dot{\underline{R}}_i \quad \dot{\underline{R}}_i = \dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_o \Rightarrow$$

$$\underline{G} = \sum m_i(\dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_o) = \sum m_i \dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_o \sum m_i \Rightarrow \underline{\underline{G} = \underline{G}_r + m\underline{v}_o}$$

4.14 - نشان دهید که اندازه حرکت زاویه‌ای به گرد نقطه ثابت O و گرانیگاه G با دستور زیر به هم می‌پیوندد.

$$\bar{H}_0 = \bar{H}_G + \bar{r} \times \bar{G}$$

که در آن، $\bar{r}$ برداری از O تا G، و $\vec{G}$ اندازه حرکت خطی دستگاه است.

$$\underline{H}_o = \underline{H}_G + \bar{\underline{r}} \times \underline{G} \quad \underline{G} = m\bar{\underline{v}}$$

4.15 - نشان دهید که اندازه حرکتهای زاویه‌ای به گرد نقطه ثابت O و هر نقطه دلخواه P با دستور زیر به یکدیگر می‌پیوندد.

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_P + \vec{r}_P \times \vec{G}$$

که در آن $\vec{r}$ برداری از O تا G، و $\vec{G}$ اندازه حرکت خطی دستگاه است.

$$\underline{H}_o = \sum \underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i = \sum (\rho'_i + \underline{r}_p) \times m_i \dot{\underline{r}}_i = \sum \rho'_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i + \underline{r}_p \times d(\sum m_i \underline{r}_i)/dt$$

$$\underline{H}_p = \sum \rho'_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i \quad d(\sum m_i \underline{r}_i)/dt = d(m\bar{\underline{r}})/dt = m\bar{\underline{v}} = \underline{G}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H}_o = \underline{H}_p + \underline{r}_p \times \underline{G}}$$

4.16 - نشان دهید که برآیند گشتاور نیروهای بیرونی به گرد هر نقطه P از دستور زیر به‌دست می‌آید.

$$\Sigma \vec{M}_P = \dot{\vec{H}}_P + \vec{v}_P \times \vec{G}$$

که در آن، $\vec{H}_P$ اندازه حرکت زاویه‌ای به گرد P از سرعتهای ناب، و $\vec{v}_P$ سرعت P و $\vec{G}$ اندازه حرکت خطی

www.collegeprozheh.ir

دستگاه است. سه شرط، برای آنکه این دستور به آرایش ساده $\Sigma\vec{M}_p=\dot{\vec{H}}_p$ درآید چیست؟

$\underline{H}_p=\underline{H}_G+\bar{\rho}\times m\bar{v} \;\Rightarrow\; \dot{\underline{H}}_p=\dot{\underline{H}}_G+\dot{\bar{\rho}}\times m\bar{v}+\bar{\rho}\times m\bar{a} \qquad \bar{a}=\dot{\bar{v}}$

$\dot{H}_G=\sum M_p-\bar{\rho}\times m\bar{a} \;\Rightarrow\; \dot{H}_p=\sum M_p+\dot{\bar{\rho}}\times m\bar{v} \qquad \bar{\rho}=\bar{r}-r_p$

$\dot{\bar{\rho}}=\bar{v}-v_p \qquad \dot{H}_G=\sum M_p+(\bar{v}-v_p)\times m\bar{v} \qquad \sum M_p=\dot{H}_p+v_p\times G$

$G=m\bar{v} \qquad v\times v=0 \qquad \sum M_p=\dot{H}_p$

(a) $v_p=0$ (b) $\bar{v}=0$ (c) $\bar{v}\parallel v_p$

4.17 - دو گلوله به میله نشان‌داده چسبانده‌ایم و آن را از یک ریسمان آویخته‌ایم. اگر نیروی $F=60\ N$ به ناگهان بر میله بنشیند، شتاب گرانیگاه و شتاب زاویه‌ای میله چیست؟

$\sum F_x=ma_x \qquad 60=(2+1)a \qquad \underline{a=20\ m/s^2}$

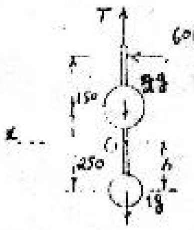
$\sum M_G=0 \qquad 2(9.81)(0.250-b)=1(9.81)b \qquad b=0.17\ m$

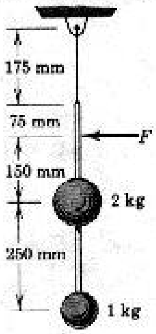
$H_G=\sum mr^2\dot{\theta}=(2(0.08)^2+1(0.17)^2)\dot{\theta}=$

$=0.0417\dot{\theta}\ N.m.s$

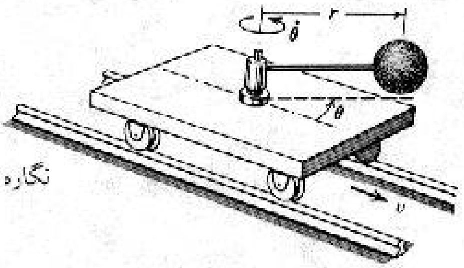
$\sum M_G=\dot{H}_G \qquad 60(0.15+0.08)=0.0417\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}=13.8/0.0417=\underline{331\ rad/s^2}$





نگاره 4.17



نگاره 4.18

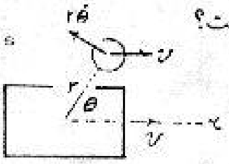
4.18 - گاری نشان‌داده، 20 کیلوگرم و گلوله چسبیده به سر میله، 5 کیلوگرم جرم دارد. $r=0.4\ m$ و میله با آهنگ ثابت $4\ rad/s$ می‌چرخد. اگر در $\theta=0^\circ$ تندی گاری $0.6\ m/s$ باشد، تندیش پس از $\theta=60^\circ$ چیست؟

$\sum F_x=0 \Rightarrow \Delta G_x=0 \qquad (G_x)_{\theta=0}=(20+5)(0.6)=15.0\ N.s$

$(G_x)_{\theta=60}=(20+5)v-5(1.6)\sin 60^\circ=25v-6.93\ N.s$

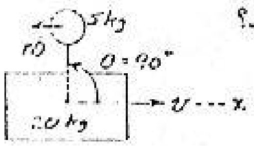
$r\dot{\theta}=0.4(4)=1.6\ m/s \qquad 15.0=25v-6.93\ ,$

$v=21.9/25=\underline{0.88\ m/s}$



www.collegeprozheh.ir

4.19 - در پرسش پیشین، بیشترین اندازه v چیست و در چه θ رخ می‌دهد؟



$G_{\theta=0}=G_{\theta=90^\circ}$ $\quad 15=20v+5v-5(1.6)$

$v=23/25=\underline{0.920 \text{ m/s} \quad \theta=90^\circ}$

4.20 - تندی قطار نشان‌داده را هنگام رسیدن به راه هموار پایینی پیدا کنید.

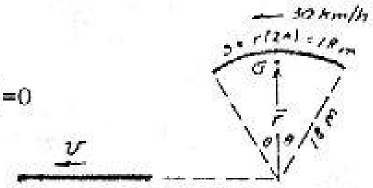
$\theta=s/2r=18/2(18)=0.5 \text{ rad}=28.65^\circ$

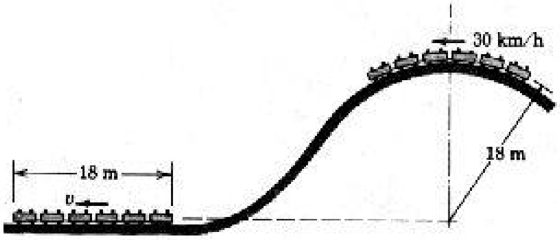
$\bar{r}=r\sin\theta/\theta=2(18)\sin 28.65^\circ=17.26 \text{ m}$

$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad m(v^2-(30/3.6)^2)-mg(17.26)=0$

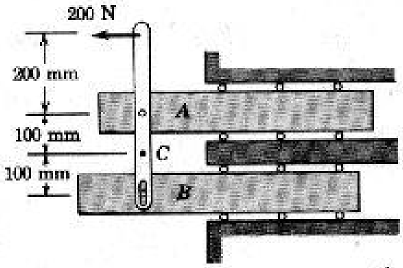
$v^2=69.4+338.6=408 \ (\text{m/s})^2 \quad v=20.2 \text{ m/s}$

$v=20.2(3.6)=\underline{72.7 \text{ km/h}}$





نگاره *4.20*



نگاره *4.23*

4.21 - اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه 6 ذره‌ای به گرد نقطه ثابت O، در $t=4$ s چنین است:

$\vec{H}_4=3.65\hat{i}+4.27\hat{j}-5.36\hat{k}$ kg.m²/s

این اندازه حرکت، در $t=4.1$ s چنین خواهد شد:

$\vec{H}_{4.1}=3.67\hat{i}+4.3\hat{j}-5.2\hat{k}$ kg.m²/s

اندازه میانگین برآیند گشتاور نیروهای نشسته براین ذره‌ها را در این گام زمانی بیابید.

$\sum \underline{M}_o=\dot{\underline{H}}_o \quad \underline{M}_{o\,av.}=\Delta\underline{H}_o/\Delta t$

$\underline{M}_{o\,av.}=$

$=[(3.67-3.65)\underline{i}+(4.30-4.27)\underline{j}+(-5.30+5.36)\underline{k}]/0.1$

$=(2\underline{i}+3\underline{j}+6\underline{k})10^{-1}$ N.m $\quad \underline{M}_{o\,av.}=\underline{0.7 \text{ N.m}}$

4.22 - جرم ذره‌های A و B و C، 2 و 3 و 4 kg است. در یک آن، بردار جایگاه و تندی آنها، چنین است:

$\vec{r}_A=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ m $\vec{r}_B=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ m $\vec{r}_C=\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ m

$\vec{v}_A=\dot{\vec{r}}_A=3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ m/s $\vec{v}_B=\dot{\vec{r}}_B=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ m/s $\vec{v}_C=\dot{\vec{r}}_C=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ m/s

اندازه حرکت زاویه‌ای این دستگاه سه ذره‌ای به گرد مبدا چیست؟

www.collegeprozheh.ir

$\underline{r}_A=2\underline{i}+\underline{j}-2\underline{k}$ m $\quad \underline{v}_A=3\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k}$ m/s $\quad \underline{r}_B=2\underline{i}+2\underline{j}-\underline{k}$ m

$\underline{v}_B=2\underline{i}+3\underline{j}+\underline{k}$ m/s $\quad \underline{r}_c=\underline{i}-2\underline{j}-2\underline{k}$ m $\quad \underline{v}_C=-2\underline{i}-2\underline{j}+k$ m/s

$\underline{H}_o=\sum \underline{r}_i\times m\underline{v}_i \quad \underline{r}_A\times m_A\underline{v}_A=4\underline{i}-4\underline{j}+2\underline{k}$ kg.m²/s

$\underline{r}_B\times m_B\underline{v}_B=15\underline{i}-12\underline{j}+6\underline{k}$ kg.m²/s

$\underline{r}_c\times m_c\underline{v}_c=-24\underline{i}+12\underline{j}-24\underline{k}$ kg.m²/s

$\Rightarrow \underline{H}_o=(4+15-24)\underline{i}+(-4-12+12)\underline{j}+$

$+(2+6-24)\underline{k}=-5\underline{i}-4\underline{j}-16\underline{k}$ kgm²/s

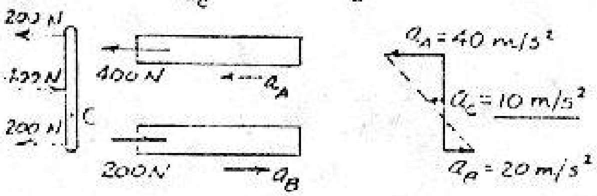
4.23 - تخته‌های A و B هر کدام $10\ kg$ جرم دارد. شتاب نقطه C، پس از نشستن نیروی $200\ N$ چیست؟

اصطکاک در کار نیست.

$\sum F=ma_c \quad 200=2(10)a_c \quad \underline{a_c=10\ m/s^2}$

$\sum F=ma \quad 400=10a_A \quad a_A=40\ m/s^2 \quad 200=10a_B \quad a_B=20\ m/s^2$

$a_A=40\ m/s^2 \quad a_c=10\ m/s^2 \quad a_B=20\ m/s^2$



4.24 - گاری $7.5\ Mg$ که بر ارابه ایستاده $25\ Mg$ سوار است، از ایست رها می‌شود، هنگامی که گاری به اندازه $s=12\ m$ پایین می‌آید، تندیش پیش از برخورد به دیوار B، چیست؟

$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad \Delta T=mv^2/2-0=25000v^2/2 \quad \Delta V_g=0$

$\Delta T=mv^2/2-0=$

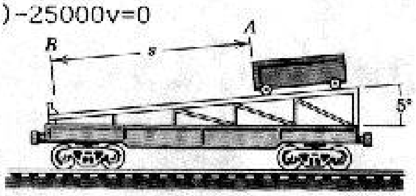
$=(7500/2)[(\dot{s}\cos5^\circ-v)^2+(\dot{s}\sin5^\circ)^2]-0$

$\Delta V_g=-W\Delta h=-7500(9.81)(40\sin5^\circ)$

$\Rightarrow 16250v^2+3750\dot{s}^2-7470\dot{s}v=76949.81$

$\sum F_x=0 \quad \Delta G_x=0 \quad 7500(9.81)(\dot{s}\cos5^\circ-v)-25000v=0$

$\dot{s}=4.35v$ m/s



نگاره 4.24

www.collegeprozheh.ir

$[16250+70959.4-32494.5]v^2=76949.81$

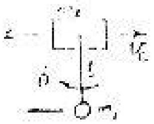
$v^2=1.4064\ (m/s)^2 \quad \underline{v=1.186\ m/s}$

4.25 - میله m_1 و گاری m_2 را از آرایش $\theta\neq 0$ رها می‌کنیم. تندی میله نسبت به گاری و تندی گاری را در $\theta=0$ بیابید.

$\Delta E=0 \quad \Delta V_g=-m_1 gl(1-\cos\theta)$

$\Delta T=m_1(l\dot{\theta}-v_c^2)/2+m_2v_c^2/2-m_1gl(1-\cos\theta)=0 \quad (1)$

$v_b=l\dot{\theta}-v_c \quad \sum F_x=0 \Rightarrow \Delta G_x=0 \quad m_2v_c-m_1(l\dot{\theta}-v_c)=0$

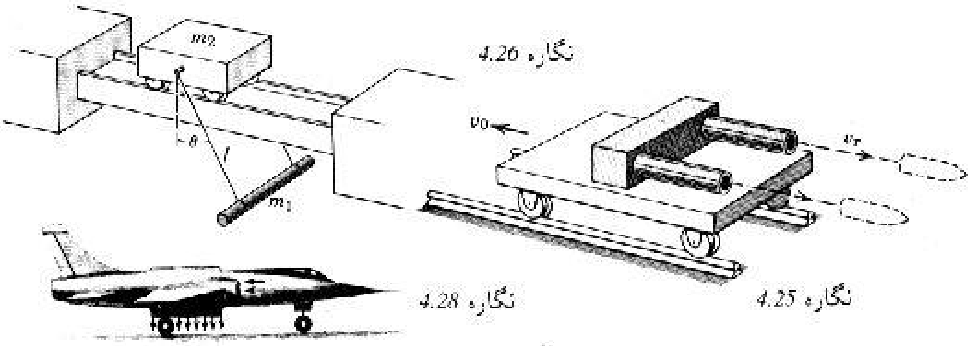


$m_1(m_2v_c/m_1)^2/2+m_2v_c^2/2=m_1gl(1-\cos\theta)$

$v_c^2=2gl(1-\cos\theta)/[(m_2/m_1)^2+(m_2/m_1)]$

$v_c=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)/[(m_2/m_1)(1+m_2/m_1)]}$

$v_{b/c}=l\dot{\theta}=v_c(1+m_2/m_1) \quad v_{b/c}=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)(1+m_1/m_2)}$



نگاره 4.26

نگاره 4.28

نگاره 4.25

4.26 - دو گلوله 10 کیلوگرمی با تندی 1200 m/s نسبت به گاری 1 Mg در سوی وارون حرکت گاری، شلیک می‌شود. تندی گاری که پیش از شلیک، 1.2 m/s بوده، پس از شلیک چه می‌شود اگر الف) گلوله‌ها همزمان، ب) یکی پس از دیگری شلیک شود.

$\Delta G_x=0$

a): simultanous firing

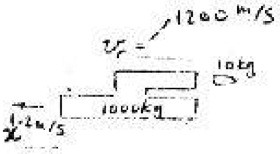
$1.2[(1000+2(10)]=1000v'-2(10)(1200-v')$

$\underline{v'=24.7\ m/s}$

b): sequential firing let v_1=vel. of vehicle after 1st projectile is fired

$(1000+20)(1.2)=1010v_1-10(1200-v_1)$

$1224=1010v_1-12000+10v_1 \quad v_1=12.96\ m/s$



$(1000+10)12.96=1000v'-10(1200-v')$

$13089.6=1000v'-12000-10v' \quad \underline{v'=24.8\ m/s}$

www.collegeprozheh.ir

4.27 - جرم آغازین موشک ساترن ۵ نزدیک به 2.7×10^3 Mg بود. هنگام پرتاب، سوخت با آهنگ 13 Mg/s و با تندی برونریز 2400 m/s می‌سوخت. شتاب آغازین موشک چه بوده است؟ فشار بیرون از موشک را فشار هوا بگیرید.

$\sum F=ma \quad \sum F=m'\Delta v-mg \Rightarrow$

$13000(2400-0)-2.7(10^6)(9.81)=2.7(10^6)a$

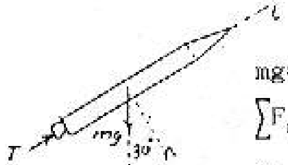
$\underline{a=1.746\ m/s^2}$

4.28 - هواپیمای عمود پرواز نشان داده، 7Mg جرم دارد. هر یک از دو موتور هواپیما، هوا با چگالی $1.217\ kg/m^3$ را با آهنگ 60 kg/s می‌مکد و آن را با تندی 600 m/s پس می‌زند. هر موتور، 1 kg/s سوخت می‌خورد. شتاب آغازین روبه‌بالای هواپیما چیست؟

$m'\Delta v_y=2(60+1)(600-0)=73200\ N$

$\sum F_y=ma_y \quad 73.2-7(9.81)=7a \quad \underline{a=0.647\ m/s^2}$

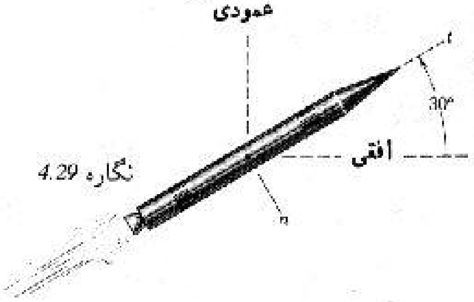
4.29 - موشک نشان‌داده، 3 Mg جرم دارد و بیرون از جو، جایی که $g=0.6\ m/s^2$ است، پیش می‌رود. سوخت با آهنگ 130 kg/s می‌سوزد و با تندی 600 m/s نسبت به موشک، بیرون می‌زند. سایه‌های n و t از شتاب موشک چیست؟



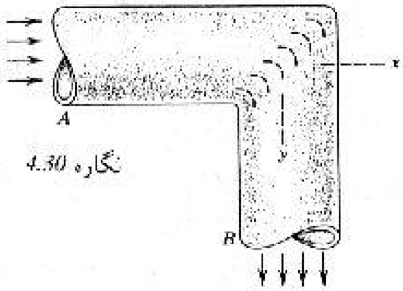
$mg=3000(9.60)=28800\ N \quad T=m'\Delta v=130(600)=78000\ N$

$\sum F_n=ma_n \quad 28800\cos30^\circ=3000a_n \quad \underline{a_n=8.31\ m/s^2}$

$\sum F_t=ma_t \quad 78000-28800\sin30^\circ=3000a_t \quad \underline{a_t=21.2\ m/s^2}$

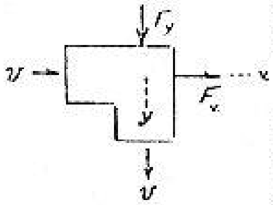


نگاره 4.29



نگاره 4.30

4.30 - لوله نشان‌داده، 3.6 m قطر دارد و پره‌های درونی آن، گذر هوا را هموار می‌کند. هنگامی که هوا با چگالی $1.206\ kg/m^3$ و با تندی 250 km/h از این زانویی می‌گذرد، چه نیرویی در سوی x و y بر زانویی می‌نشاند؟



$\sum F=m'\Delta v \quad m'=\rho Av=$

$=1.206\pi(3.6)^2(250/3.6)/4=852.42\ kg/s$

$\underline{F_x=852.42(0-69.44)=-59192.04\ N}$

$\underline{F_y=852.42(69.44-0)=59192.04\ N}$

www.collegeprozheh.ir

4.31 - کامیون نشان‌داده، یک برف‌روب چرخان دارد و با تندی 20km/h پیش می‌رود. برف‌روب در هر دقیقه 60 Mg برف را با تندی 12 m/s فوت می‌کند. نیروی کششی P و نیروی پهلویی R بین چرخها و جاده چیست؟

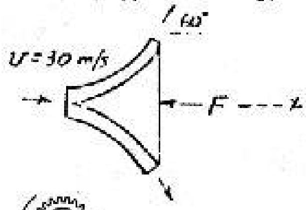
$\sum F_x = m' \Delta v_x \quad P=60000(20/3.6-0)/60=5556$ N $\quad \underline{P=5.56 \text{ KN}}$

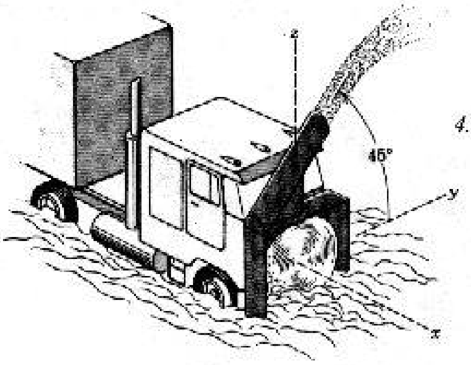
$\sum F_y = m' \Delta v_y \quad R=60000(12\cos 45^\circ - 0)=8485$ N $\quad \underline{R=8.49 \text{ KN}}$

4.32 - آب با چگالی $1000\ kg/m^3$ و با تندی 30 m/s و آهنگ $0.05\ m^3/s$ به پره نشان‌داده می‌خورد. نیروی F برای نگهداری پره چیست؟

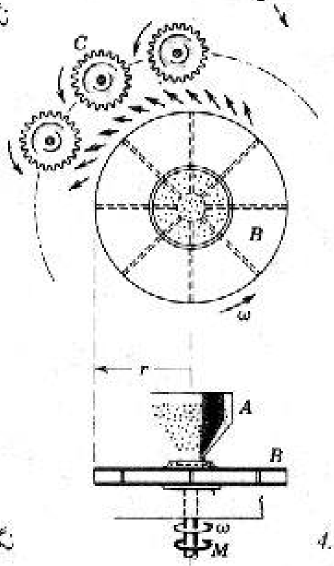
$m' = \rho Q = 1000(0.05) = 50$ kg/s

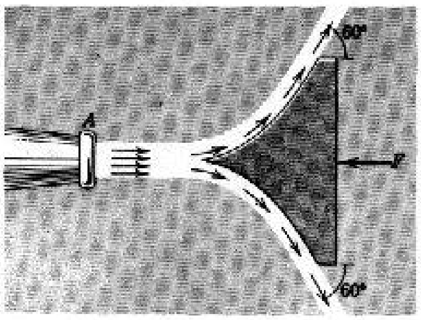
$\sum F_x = m' \Delta v_x \quad -F=50(30\cos 60^\circ - 30) \quad \underline{F=750 \text{ N}}$





نگاره 4.31





نگاره 4.32

نگاره 4.33

4.33 - ساچمه‌ها از مخزن A به مرکز پروانه چرخان B می‌ریزد. پروانه با چرخش خود، افشانه‌ای از ساچمه می‌سازد که به چرخدنده‌های چرخان C می‌خورد. اگر در هر ثانیه، m کیلوگرم ساچمه پرتاب شود و تندی چرخش پروانه، ω باشد، گشتاور M برای چرخاندن پروانه چیست؟

$\sum M = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) = m(r\omega)r - 0 \quad \underline{M = mr^2\omega}$

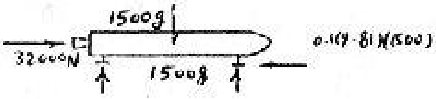
4.34 - یک موشک 1500 کیلوگرمی با چهار موتور خود که هر یک، رانش 8 kN می‌سازد، پیش می‌رود. نیروی اصطکاک هوا، 10 درصد نیروی وزن آن است. گازهای برونریز، با تندی 480 m/s از شیپوره‌ها بیرون می‌زنند. شتاب آغازین و آهنگ مصرف سوخت چیست؟

www.collegeprozheh.ir

$4\times8000=32000$ N

$\Sigma F=ma \quad 32000-0.1(9.81)(1500)=1500a \quad \underline{a=20.4\ m/s^2}$

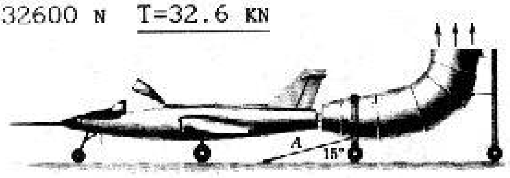
$F=m'\Delta v \quad 8000=m'(480-0) \quad \underline{m'=16.67\ kg/s}$



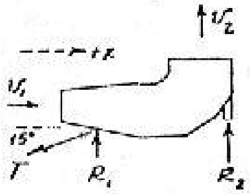
4.35 - لوله خمیده‌ای که می‌بینید، صداگیر هواپیمای جت است. موتور هواپیما، هوا را با آهنگ *43 kg/s* می‌مکد و سوخت را با آهنگ *0.8 kg/s* می‌سوزاند. گاز برونریز با تندی *720 m/s* بیرون می‌زند. کشش ریسمان *A* چیست؟

$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad -T\cos15^{\circ}=(43+0.8)(0-720)$

$T=32600$ N $\quad \underline{T=32.6\ KN}$

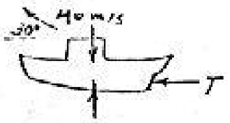


نگاره 4.35



4.36 - کشتی آتش‌نشانی، آب دریا با چگالی *1030 kg/m³* را با تندی *40 m/s* و آهنگ *0.08 m³/s*، روبه‌عقب می‌پاشد. نیروی پیشران کشتی چه باشد تا از جا تکان نخورد؟

نگاره 4.36



$m'=(0.08\ m^3/s)(1030\ kg/m^3)=82.4\ kg/s$

$\sum F=m'\Delta v \quad T=82.4(40\cos30^{\circ}-0) \quad \underline{T=2.85\ kN}$

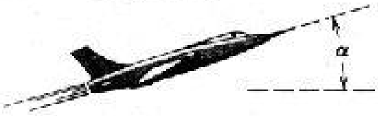
4.37 - هواپیمای نشان‌داده، *4.6 Mg* جرم دارد و در برابر نیروی اصطکاک *32 kN* با تندی *1000 km/h* پیش می‌رود. هوا با آهنگ *106 kg/s* به درون موتورها می‌رود و پس از سوزاندن سوخت با آهنگ *0.98 kg/s* با تندی *680 m/s*، از پشت هواپیما به بیرون می‌زند. زاویه حمله *α* چه باشد تا ارتفاع هواپیما پایا بماند؟

$mg=4.6(9.81)$ KN

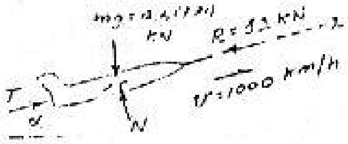
$T=m_a'(u-v)+m_f'u=106(680-1000/3.6)+0.98(680)=43302$ N

$\sum F_x=ma_x=0 \quad 43.3-32-4.6(9.81)\sin\alpha=0$

$\sin\alpha=0.2505 \quad \underline{\alpha=14.50^{\circ}}$

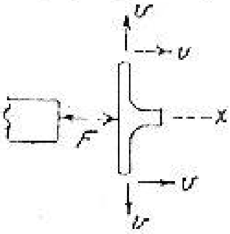


نگاره 4.37



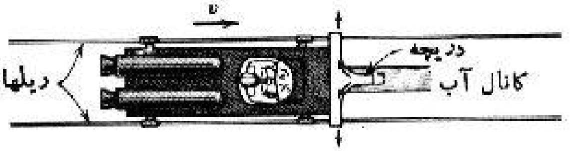
www.collegeprozheh.ir

4.38 - ارابه موشکی نشان‌داده با تندی 300 m/s پیش می‌رود. برای ترمز گرفتن، دریچه‌ای را به درون آب می‌فرستد تا آب با چگالی 1000 kg/m³ از دریچه 10^{-2} m² به درون راهگاه بیاید و به دو سوی ارابه بپاشد. نیروی ترمز در آغاز چیست؟



$v=300$ m/s $\quad m'=\rho Av=1000(10^{-2})(300)=3000$ kg/s

$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad F=3000(300-0)=90(10^4)$ N $\quad$ $F=900$ kN



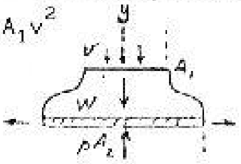
نگاره 4.38

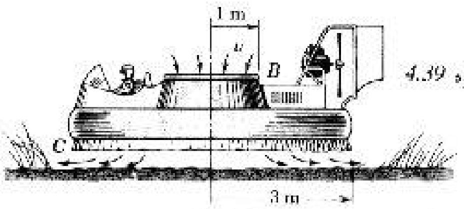
4.39 - جرم هاورکرافت نشان‌داده، 2.2 Mg است. این خودرو، هوا را از دریچه B می‌مکد و از دامن C بیرون می‌دهد. تندی هوای درونریز، 45 m/s و قطر دامن، 6 m و چگالی هوا، 1.206 kg/m³ است. فشار هوا در زیر دامن C چیست؟

$\sum F_y=m'\Delta v_y \; ; \; m'=\rho A_1 v \quad \Delta v_y=0-(-v)=v \quad PA_2-w=\rho A_1 v^2$

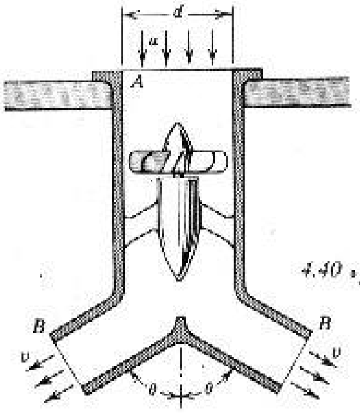
$P(6^2)(\pi/4)-2200(9.81)=1.206(45^2)(\pi)(2^2/4)$

$P=1.034$ kPa

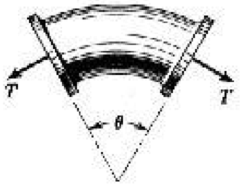




نگاره 4.39

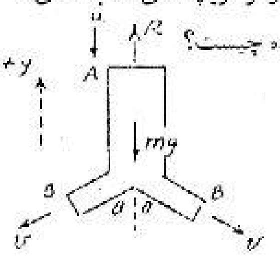


نگاره 4.40



نگاره 4.42

4.40 - دمنده نشان‌داده، هوا با چگالی ρ را با تندی u از دریچه A می‌مکد و از دریچه‌های B با تندی v می‌دهد. فشار هوا در بیرون دریچه‌ها، فشار جو است. نیروی تکیه‌گاه دمنده چیست؟

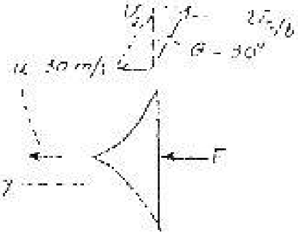


$m'=\rho Av \quad \Delta v_y=-v\cos\theta-(-u)=u-v\cos\theta \quad \sum F_y=m'\Delta v_y$

$m'=\rho u(\pi d^2/4) \quad R-mg=\rho u(\pi d^2/4)(u-v\cos\theta)$

$R=mg+\rho u(\pi d^2/4)(u-v\cos\theta)$

4.41 - در پرسش 4.32، نیروی F چه باشد تا پره با تندی 30 m/s به چپ حرکت کند؟ توان این کار چه اندازه است؟



$$v_{B/A}=30+30=60\ m/s \qquad \sum F_x=m'\Delta v_x$$

$$m'=(30+30)(0.05)(1000)/30=100\ kg/s$$

$$F=100(0-(-30))=3000\ N=3\ kN$$

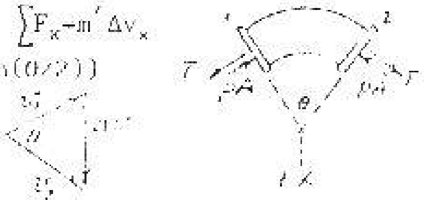
$$P=Fu=3000(30)=9(10^4)\ W \qquad \underline{P=90\ kW}$$

4.42 - زانویی نشان‌داده، با دو نیروی کشش T (از لوله‌های نشان‌داده) نگهداری می‌شود. اگر مایعی به چگالی ρ و فشار ستاتیکی P با تندی v از این لوله به مقطع بگذرد، نشان دهید که T به θ بستگی ندارد.

$$\Delta v=2v\sin(\theta/2) \quad \text{Where } v=\underline{v}_1=\underline{v}_2 \qquad \sum F_x=m'\Delta v_x$$

$$2T\sin(\theta/2)-2PA\sin(\theta/2)=\rho Av(2v\sin(\theta/2))$$

$$T-PA=\rho Av^2 \qquad \underline{T=A(P+\rho v^2)}$$



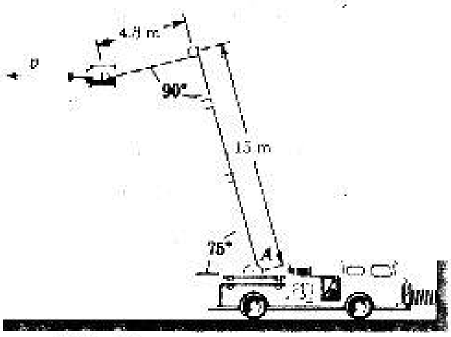
4.43 - آزمایش یک خودروی آتش‌نشانی را می‌بینید. هنگامی که آب با تندی v از شیپوره‌ای به قطر 30 mm بیرون می‌زند، خودرو فنری به سختی $k=15\ kN/m$ را 150 mm می‌فشرد. اندازه v چیست؟ در پیوند A چه گشتاوری باید نگهداری شود؟

$$kx=m'\Delta v \quad m'=\rho Av=1000v\pi(0.030)^2/4=0.7069v$$

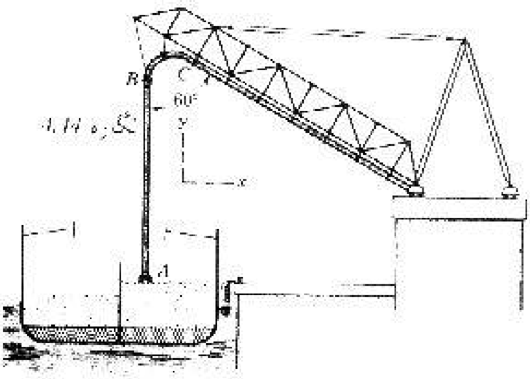
$$15000(0.150)=0.7069v(v-0) \quad v^2=3183 \quad \underline{v=56.4\ m/s}$$

$$\sum M_A=m'vd \quad M=15(150)(15\sin75°-4.8\cos75°)=$$

$$=2250(13.25)=29800\ N.m \quad \underline{M=29.8\ kN.m}$$



نگاره 4.43



نگاره 4.44

4.44 - چگونگی تخلیه گندم از کشتی به یاری مکش را می‌بینید. برآیند نیرو بر زانویی در سوی x و y چیست؟ هوا در زانویی به قطر 350 mm با آهنگ 16 Mg/h با مکش 230 mm جیوه $(P-30.7\ kPa)$

www.collegeprozheh.ir

می‌گذرد و در هر ساعت 135 Mg گندم را با تندی 40 m/s با خود می‌برد.

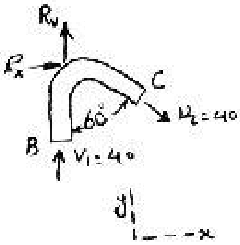
$m'_{air}=16000/3600=4.44$ kg/s

$m'_{wh}=135000/3600=37.5$ kg/s

$\sum F=m'\Delta v \quad R_x=(4.44+37.5)(40\sin 60°-0)=1452.8$ N

$R_y=(4.44+37.5)(-40\cos 60-40)=2516.4$ N

$PA=30700\pi(0.35)^2/4=2953.4$ N



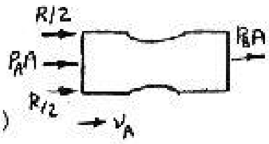
4.45 - دمنده نشان‌داده، هوا با چگالی ρ_A و فشار P_A را از A می‌مکد و از B با چگالی ρ_B و فشار P_B و تندی v بیرون می‌دهد. برآیند نیروهای افقی در نگهدارنده A چیست؟

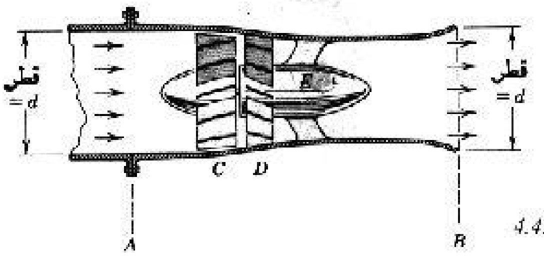
$\rho_A A v_A=\rho_B A v \quad v_A=v\rho_B/\rho_A \quad m'=\rho A v=\rho_B A v$

$\sum F=m'\Delta v \quad R+P_A A-P_B A=\rho_B A v(v-v_A)=\rho_B A v^2(1-\rho_B/\rho_A)$

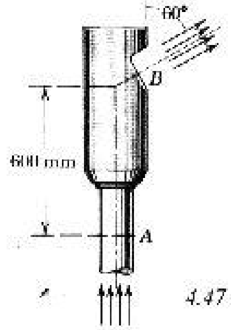
$A=\pi d^2/4 \quad R=\rho_B(\pi d^2/4)v^2(1-\rho_B/\rho_A)+(P_B-P_A)(\pi d^2/4)$

$R=\pi d^2/4(\rho_B(1-\rho_B/\rho_A)v^2+(P_B-P_A))$





نگاره 4.45



نگاره 4.47

4.46 - یک جت چندپره‌ای چون نگاره 4.59 مانند توربین نگاره 4.60 کار می‌کند. بیشترین توان P برای هر زاویه تیغه چیست؟ تندی بهینه پره‌ها، بر حسب تندی جت برای توان بیشینه چیست؟ پرسش نمونه 4.6 را با بیشمار گرفتن تعداد پره‌ها به گونه‌ای که آهنگ ترک سیال برابر آهنگ آن به هنگام گذر از پره‌ها باشد پاسخ‌یابی کنید.

$\Delta v_x=-(v-u)(1-\cos\theta) \quad m'=\rho A v \quad \sum F_x=m'\Delta v_x$

$-F_{av}=\rho A v[-(v-u)(1-\cos\theta)]$

$P=F_{av}u=\rho A v u(v-u)(1-\cos\theta)$

$dp/du=\rho A(1-\cos\theta)(v^2-2vu)=0$

$u=v/2 \quad P=\rho A v^3(1-\cos\theta)/4$

4.47 - هوا با آهنگ 6 kg/s و فشار 1400 kPa از A به درون لوله می‌رود و با فشار جو، از B بیرون می‌زند. تندی هوا در A، 45 m/s و در B، 360 m/s است. نیروی کششی T و نیروی برشی V و لنگر خمشی M در

www.collegeprozheh.ir

لوله را در نقطه A بیابید. سطح لوله در A، $7500\ mm^2$ است.

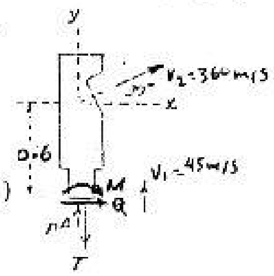
$m' = 6\ kg/s$

$PA = 1400000(0.0075) = 10500\ N \quad \sum F_x = m'\Delta v_x$

$Q = 6(360\cos 30^\circ - 0) \quad \underline{Q = 1871\ N}$

$\sum F_y = m'\Delta v_y \quad 10500 - T = 6(360\sin 30^\circ - 45) - 150)$

$\underline{T = 9690\ N}$



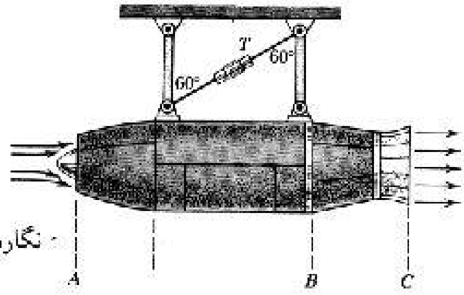
$\sum M_A = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) \quad M = 6[(360)(0.6)\cos 30 - 0]$

$\underline{M = 1122\ N.m}$

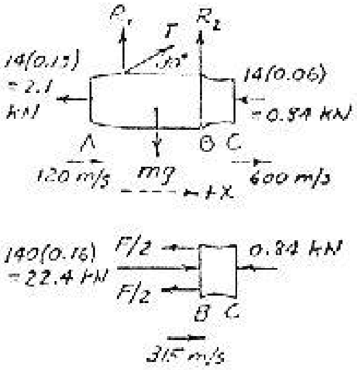
4.48 - یک دستگاه آزمایش موتور جت را می‌بینید. هوا با آهنگ $30\ kg/s$ به درون موتور می‌رود و سوخت را با آهنگ $0.6\ kg/s$ می‌سوزاند. مساحت و فشار استاتیکی و تندی هوای گذرنده در نقطه A و B و C چنین است:

	مقطع A	مقطع B	مقطع C
مساحت m^2	0.15	0.16	0.06
فشار kPa	-14	140	14
تندی هوا m/s	120	315	600

نیروی کششی T و نیرو در نگه‌دارنده‌های موتور چیست؟



نگاره 4.48



$\sum F_x = m'\Delta v_x$

$-2.1 - 0.84 + T\cos 30^\circ = [30.6(600) - 30(120)]10^{-3}$

$\underline{T = 20.4\ kN}$

$\sum F_x = m'\Delta v_x \quad 22.4 - 0.84 - F = 30.6(600 - 315) \quad \underline{F = 12.84\ kN}$

www.collegeprozheh.ir

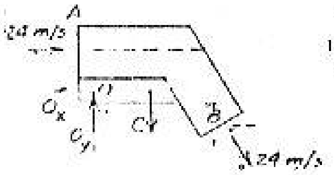
4.49 - زانویی AB با لولای O و C نگهداری می‌شود. آب تازه با چگالی $1000\ kg/m^3$ و تندی $24\ m/s$ از A به درون زانویی می‌رود و با همان تندی، از B بیرون می‌رود. اگر آهنگ جریان $0.2\ m^3/s$ باشد چه نیرویی بر میله C می‌نشیند.

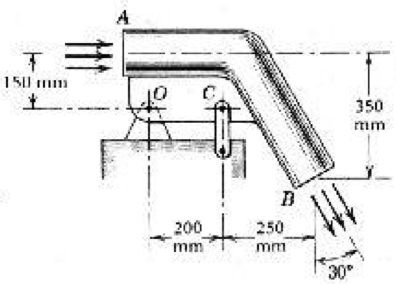
$\rho=1000\ kg/m^3 \quad Q=0.20\ m^3/s$

$m'=\rho Q=1000(0.20)=200\ kg/s \quad \sum M_o=m'(v_2d_2-v_1d_1)$

$0.200C=200(0.450\times24\cos30^\circ-0.200\times24\sin30^\circ-0.150\times24)$

$0.200C=200(3350) \quad C=3350\ N \quad \underline{C=3.35\ kN}$





نگاره 4.49

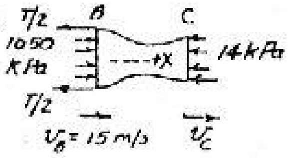
4.50 - هوا با تندی $15\ m/s$ از A، به درون شیپوره نشان‌داده، می‌رود. چگالی هوا و فشار استاتیکی در B و $13.5\ kg/m^3$ و $1050\ kPa$، و در C، $1.217\ kg/m^3$ و $14\ kPa$ است. چه نیرویی بر پیچهای نگهدارنده B می‌نشیند.

$A_c=\pi(0.1)^2/4=0.00785\ m^2 \quad A_B=4A_c=0.0314\ m^2$

$m'=\rho Av \quad m'_B=13.5(0.0314)(15)=6.36\ kg/s$

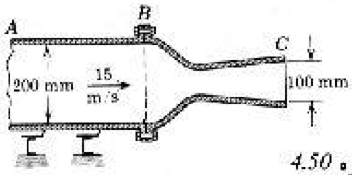
$m'_B=m'_c=\rho_c A_c v_c \quad 6.36=1.217(0.00785)v_c \quad v_c=666\ m/s$

$\sum F_x=m'\Delta v_x$

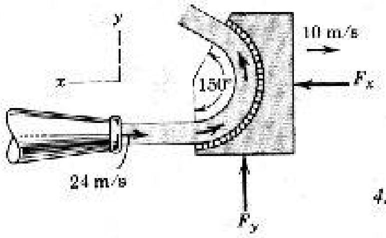


$-T+1050(0.0314)-14(0.00785)=6.36(666-15)/10^3$

$\underline{T=28.7\ kN}$

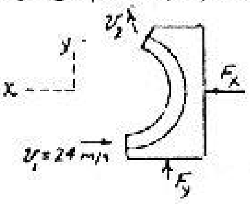


نگاره 4.50



نگاره 4.51

4.51 - پره نشان‌داده با تندی $10\ m/s$ از برابر افشانه آب، می‌گریزد. نیروی F_x و F_y برای انجام این حرکت چیست؟



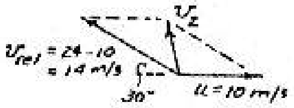
$v_{2x}=14\cos30^\circ-10=2.12\ m/s \quad v_{2y}=14\sin30^\circ=7\ m/s$

$m'=\rho Av_{rel}=1000\pi(0.025)^2(14)/4=6.87\ kg/s$

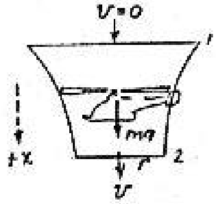
$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad F_x=6.87(2.12-[-24])=\underline{179.5\ N}$

www.collegeprozheh.ir

$\sum F_y=m'\Delta v_y \quad F_y=6.87(7-0)=48.1\ \text{N}$

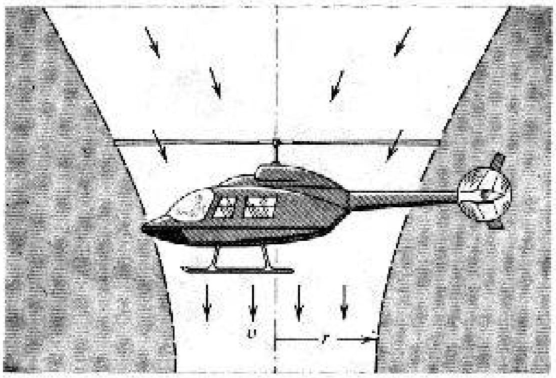


4.52 - چرخبال نشان‌داده به جرم m با خرکلی که به هوا می‌دهد، در هوا می‌ایستد. تندی هوای v را در جایی از زیر ملخ که شعاع جریان هوا، r و فشار هوا، $1\ atm$ است، بیابید. توان موتور چیست؟ از اصطکاک هوا و تغییر چگالی و افزایش دما چشم بپوشید.

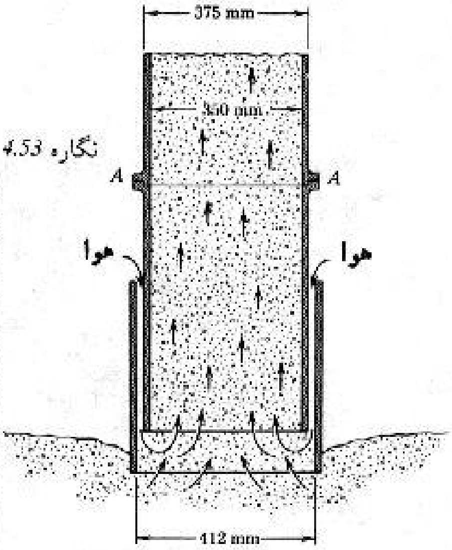


$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad mg=\rho\pi r^2 v(v-0) \quad v=(1/r)\sqrt{mg/\pi\rho}$

$P=m'(v_2^2-v_1^2)/2=m'v^2/2=mgv/2=(mg/2r)\sqrt{mg/\pi\rho}$

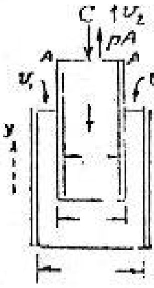


نگاره 4.52



نگاره 4.53

4.53 - نوک لوله مکش برای تخلیه گندم پرسش 4.44 را می‌بینید. فشار مکش، 230 mmHg(P=-30.7 kPa) و فشار در کف لوله بیرونی، $P=0$ است. چگالی هوای گذرنده از لای دو لوله $1.206\ kg/m^3$ است و با آهنگ $16\ Mg/h$ در هر ساعت $135\ Mg$ گندم را با تندی $40\ m/s$ بالا می‌کشد. اگر جرم لوله در زیر مقطع A، $30\ kg$ باشد، چه نیرویی در آن مقطع پدید می‌آید؟



$v_2=40\ \text{m/s}$

$A_{air)in}=\pi(0.412^2-0.375^2)/4=0.023\ \text{m}^2$

$A_{air)out}=\pi(0.350)^2/4=0.096\ \text{m}^2$

$PA=-(-30700)(0.096)=2947.2\ \text{N}$

$m'_{air}=16000/3600=4.44\ \text{kg/s}$

www.collegeprozheh.ir

$m'_{wh}=135000/3600=37.5$ kg/s

$v_1=m'_{air}/\rho A=4.44/(1.206\times0.023)=160.07$ m/s

$\sum F_y=m'\Delta v_y$

$-C-30(9.81)+2947.2=4.44[40-(-160.07)]+37.5(40)=$
$=2388.31 \quad \underline{C=264.6}$ N

4.54 - هواپیما با برگرداندن گازهای خروجی موتور، ترمز می‌گیرد. تندی هواپیما را $250\ km/h$ و آهنگ مکش هوا را $40\ kg/s$ و آهنگ مصرف سوخت را $0.6\ kg/s$ و تندی بیرون زدن گاز از موتور را $600\ m/s$ بگیرید و بگویید نیروی ترمز، چه کسری از نیروی رانش است؟

$v=250/3.6=69.4$ m/s

with reversers:

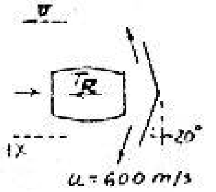
$T_R=m'_g u\sin20^\circ+m'_a v$

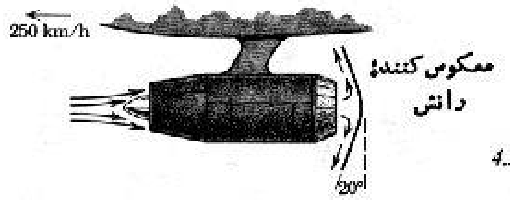
$T_R=(40+0.6)(600)(0.3420)+40(69.4)=11100$ N

without reverses:

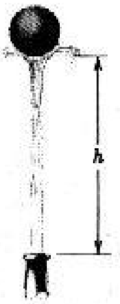
$T=m'_g u-m'_a v \quad T=(40+0.6)(600)-40(69.4)=21600$ N

$n=T_R/T=11100/21600=\underline{0.515}$



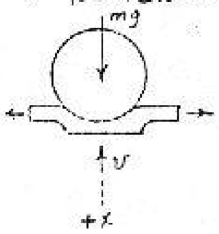


نگاره 4.54



نگاره 4.55

4.55 - آب‌فشان نشان‌داده، آب را با چگالی ρ و تندی u از قطر d بیرون می‌راند و توپی به جرم m را نگه می‌دارد. بلندی h چیست؟



$u^2-v^2=2gh \quad v=\sqrt{u^2-2gh}$

$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad mg=\rho u(\pi d^2/4)(0-(-\sqrt{u^2-2gh}))$

$\underline{h=u^2/2g-8g(m/\rho\pi u d^2)^2}$

4.56 - فشار آب در مقطع B از شیر آب آتش‌نشانی نگاره 4.56، $800\ kpa$ و چگالی آب، $1000\ kg/m^3$ و مساحت $6.8(10^4)$ است. آب با آهنگ $0.28\ m^3/s$ از دو لوله، هر یک به اندازه $3800\ mm^2$ بیرون می‌ریزد. نیروی کششی T و نیروی برشی V و لنگر خمشی M در پایه B چیست؟

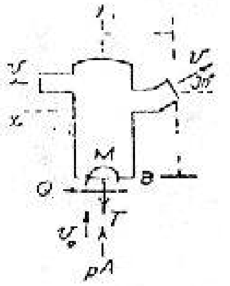
$v=V/A=(0.28/2)/0.0038=36.84$ m/s
for each outlet

www.collegeprozheh.ir

$m' = 0.14(1000) = 140$ kg/s

$v_o = 0.28/0.068 = 4.12$ m/s $\quad \sum F_y = m'\Delta v_y$

$-T + 800000(0.068) = 140[(0-4.12) + (36.84\sin 30^\circ - 4.12)]$



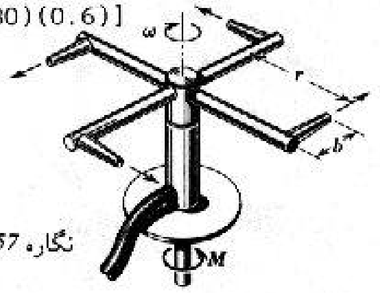
$\underline{T = 52974 \text{ N}} \quad \sum F_x = m'\Delta v_x$

$V = 140(36.84-0) + 140(-36.84\cos 30^\circ - 0) = \underline{691 \text{ N}}$

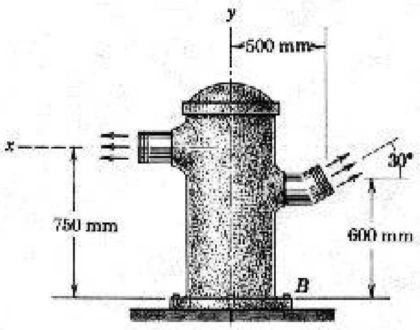
$\sum M_B = \sum m' vd$

$M = [140(36.84)(0.74)] - [140(36.84)\cos 30(0.6)] + [140(36.84\sin 30)(0.5)]$

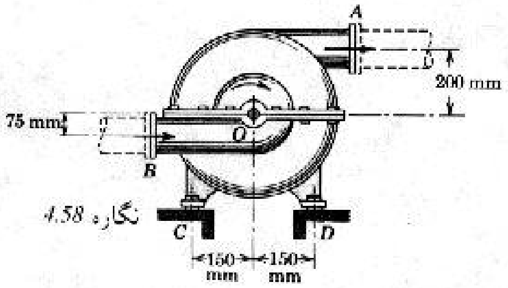
$M = 3868 - 2680 + 1289 = \underline{2477 \text{ N.m}}$



نگاره 4.57

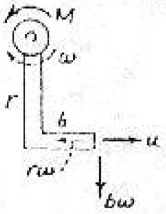


نگاره 4.56



نگاره 4.58

4.57 - آب‌پاش نشان‌داده، آب را با آهنگ حجمی Q می‌پاشد و با تندی پایای ω می‌چرخد. دهانه هر شیپوره را A بگیرید و گشتاور M را که بر پایه می‌نشیند به‌دست‌آورید. آیا سرعتی هست که در آن، M صفر گردد؟



$\sum M = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) \quad u = v_{water/nozzel} = Q/4A$

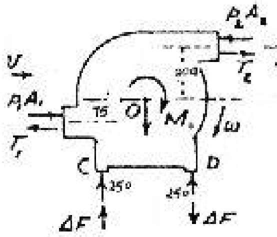
$m' = \rho Q \quad -M = \rho Q(r^2\omega + b^2\omega - Qr/4A - 0)$

$\underline{M = \rho Q(Qr/4A - (r^2+b^2)\omega)} \quad M = 0 \Rightarrow \underline{\omega = \omega_o = Qr/(4A(r^2+b^2))}$

4.58 - تلمبه گریزازمرکز نشان‌داده، در هر دقیقه $20\ m^3$ آب تازه را با تندی $18\ m/s$ از B می‌مکد و از A بیرون می‌دهد. پروانه تلمبه با توان $40\ kW$ و تندی $900\ rev/min$ می‌چرخد. هنگامی که تلمبه کار نمی‌کند، نیروی واکنش در C و در D، $250\ N$ است. این نیروها به هنگام کار، چیست؟ نیروی کششی در

www.collegeprozheh.ir

A و در B با نیروی پدید آمده از فشار استاتیکی آب، برابر است.



$P=M\omega \quad M=40\times10^3/(900\times\pi/30)=424.4$ N.m

$\sum M_o=0 \quad -m'(v_2d_2+v_1d_1)+424.4+\Delta F(0.15+0.15)=0$

$(20\times1000/60)(18\times0.2+18\times0.075)-424.4+0.3\Delta F=0$

$\Delta F=4086$ N $\quad$ $C=\Delta F+250=4336$ N

$D=\Delta F-250=3836$ N

4.59 - پره A از دستگاه نشان‌داده، ایستاده است و پروانه B با شعاع 375 mm می‌چرخد. فرآورده‌های سوخت، از میان پره‌های A می‌گذرد و با زاویه °20 به پروانه B می‌خورد. اگر گاز با آهنگ 15 kg/s از پروانه بگذرد، توان توربین چیست؟

$v_G/315=\sin110°/\sin45° \quad v_G=434$ m/s

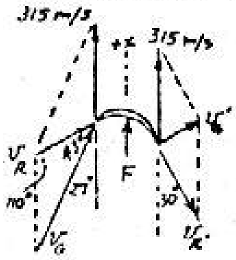
$v_R/315=\sin27°/\sin43° \quad v_R=210$ m/s

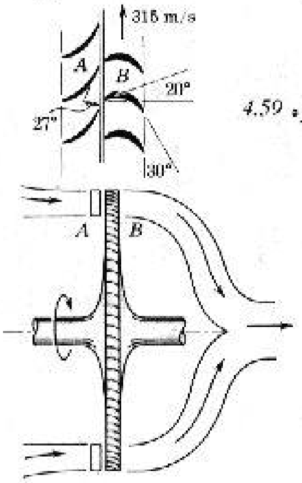
Exit: $v'_R=v_R \quad v'_{Gx}=315-210\cos30°=133.4$ m/s

$|\Delta v_x|=434\cos27°-133.4=253$ m/s $\quad \sum F_x=m'\Delta v_x$

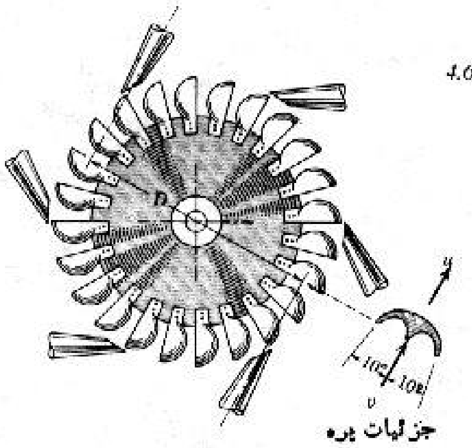
$\sum F_{all\ blades}=15(253)=3800$ N $\quad F=3.8$ kN

$P=\sum Fv \quad P=3800(315)=1.197$ MW





نگاره 4.59



نگاره 4.60

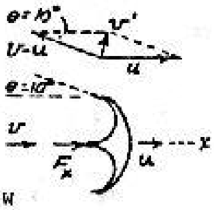
4.60 - در نگاره 4.60 یکی توربین آبی را می‌بیند. آب با فشار استاتیکی 300 m از شیپورها بیرون می‌زند و چرخ توربین را با 270 rev/min می‌چرخاند و توان 22000 kW پدید می‌آورد. بازده مولد برق، 0.9 و بازده تبدیل انرژی جنبشی آب به انرژی مکانیکی، 0.85 است. اگر تندی لبه پروانه، 0.47 تندی آب باشد، اندازه d قطر شیپوره و D قطر پروانه را به‌دست‌آورید.

www.collegeprozheh.ir

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(300)}=76.7\ m/s \quad u=0.47v=36.1\ m/s$

$\Delta v_x=[u-(v-u)\cos\theta]-v=(v-u)(1+\cos\theta)$

$\Delta v_x=-80.7\ m/s$



$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad F_x=1000(76.7A)(-80.7)=6.19(10^6)A\ N$

$A=$ jet area m^2

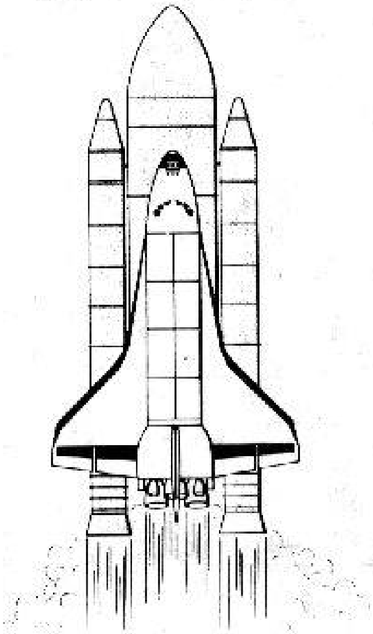
Theory: $P=6F_yu=6(6.19)(10^6)A(36.1)=1.34A(10^7)\ W$

$Actual/Theory=22(10^6)/1.340A(10^9)=0.90(0.85)$

$A=0.0215\ m^2 \Rightarrow \pi d^2/4=0.0215 \quad \underline{d=0.165.3\ mm} \quad u=D\omega/2$

$D=2u/\omega=2(36.1)/(270\times2\pi/60)=\underline{2.55\ m}$

4.61 - شاتل فضایی، به‌هنگام برخاست، $2.04\times10^3 Mg$ جرم دارد. هر یک از دو موشک کناری، 11.8×10^3 kN نیروی رانش، و هر یک از سه موتور موشک میانی، 2000 kN نیرو می‌سازد. تکان ویژه (نسبت تندی گاز برونریز به شتاب گرانش) برای هر موتور از موشک میانی، 455 s است. اندازه شتاب عمودی شاتل، هنگامی که همه موشکها کار می‌کند چیست؟ آهنگ مصرف سوخت هر موتور موشک میانی چیست؟



نگاره 4.61

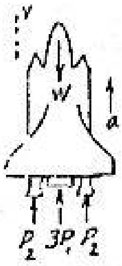
$W=2.04(10^6)9.81=20.01\ MN$

$P_1=11.8\ MN$

$P_2=2\ MN$

$I=u/g$

$u=455(9.81)=4463.55\ m/s$



$\sum F_y=ma_y$

$3(11.8)+2(2)-20.01=$

$=2.04a \quad \underline{a=9.505\ m/s^2}$

$P_1=\omega' u/g$

$11.8(10^6)=\omega'(4463.55)$

$\underline{\omega'=2643\ kg/s}$

4.62 - کامیون خیابان‌شو، *10 Mg* جرم دارد. کامیون با شتاب $0.6\ m/s^2$ به راه می‌افتد و در هر ثانیه، *40 kg* آب را با تندی *20 m/s* از شیپوره پشتی، بر زمین می‌پاشد. اندازه نیروی پیشران، بین جاده و چرخها، هنگامی که الف) شیر باز است و ب) شیر بسته است، چیست؟

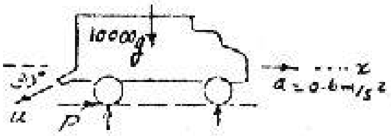
$\sum F_x = m\dot{v} + \dot{m}u \quad u = 20\ m/s \quad \dot{m} = -40\ kg/s$

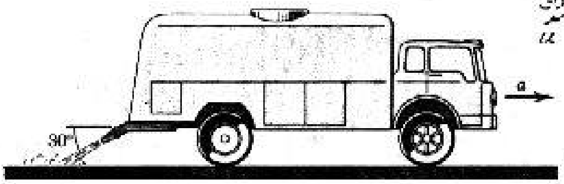
$m = 10000\ kg$

(a) Water on;

$P = 10000(0.6) - 40(20)\cos 30^\circ = 6000 - 692.82 = \underline{5307.2\ N}$

(b) Water off; $\dot{m} = 0$ $\underline{P = 6000\ N}$





نگاره 4.62

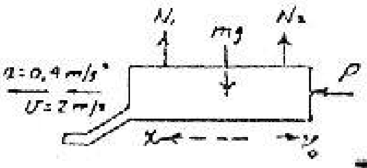
4.63 - جرم مخزن خالی نشان‌داده، *50 kg* است و با نیروی *P* به چپ رانده می‌شود. آب از نهری با تندی *1.5 m/s*، از دریچه‌ای به اندازه $2000\ mm^2$ با آهنگی برابر باتندی دریچه نسبت به آب، به درون مخزن می‌ریزد. هنگامی که تندی و شتاب مخزن، *2 m/s* و *0.4 m/s* است و *80 kg* آب به درون آن ریخته است، نیروی *P* چیست؟

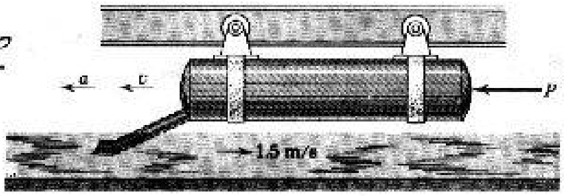
$m = 50 + 80 = 130\ kg$

$\dot{m} = \rho A u = \rho A(v + v_o) = 1000(2000)10^{-6}(2 + 1.5) = 7.0\ kg/s$

$u = v + v_o = 3.5\ m/s \quad \sum F_x = m\dot{v} + \dot{m}u$

$P = 130(0 - .4) + 7.0(3.5) = 52 + 24.5 = \underline{76.5\ N}$





نگاره 4.63

4.64 - ریسمان سنگینی به جرم *1.2 kg/m* به طول *100 m*، از درون گاری *40* کیلوگرمی، باز می‌شود. اگر هنگامی که *30 m* از ریسمان، درون گاری است، کشش ریسمان، *24 N* باشد و گاری با تندی *2 m/s* پیش رود، نیروی *P* چه باشد تا به گاری، شتاب $0.3\ m/s^2$ بدهد؟

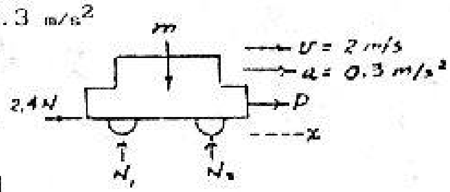
www.collegeprozheh.ir

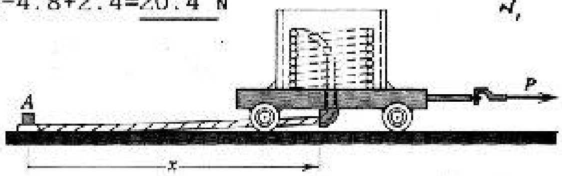
$m=40+30(1.2)=76$ Kg $\quad v=2$ m/s $\quad a=0.3$ m/s^2

$\dot{m}=-\rho v=-1.2(2)=-2.4$ kg/s

$\sum F_x=m\dot{v}+\dot{m}u \quad P-2.4=76(0.3)-2.4(2)$

$P=22.8-4.8+2.4=\underline{20.4}$ N

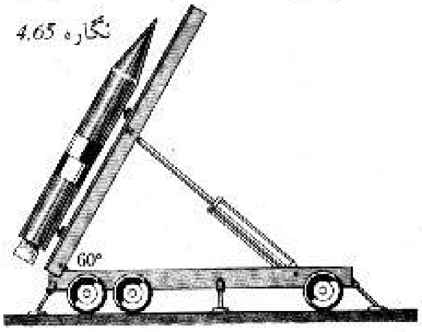


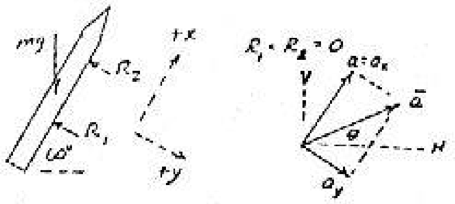


نگاره 4.64

4.65 - موشک نشان‌داده، به جرم 8.5 Mg با آهنگ 200 kg/s سوخت می‌سوزاند و گازهای برون‌ریز، با تندی 760 m/s از آن بیرون می‌زند. شتاب آغازین موشک و شیب بردار شتاب گرانیگاه آن را پس از جداشدن از سکو بیابید.

نگاره 4.65





$\sum F_x=m\dot{v}+\dot{m}u \quad -mg\sin 60^\circ=ma-\dot{m}u$

$-8.5(10^3)(9.81)\sin 60^\circ+200(760)=8.5(10^3)a$

$\underline{a=9.39 \text{ m/s}^2}$

$\sum F_y=ma_y \quad mg\cos 60^\circ=ma_y \quad a_y=9.81\cos 60^\circ=4.905$ m/s^2

$\bar{a}_v=a_x\cos 30^\circ-a_y\sin 30^\circ=9.39(0.866)-4.905(0.5)=5.68$ m/s^2

$\bar{a}_H=a_x\sin 30^\circ+a_y\cos 30^\circ=9.39(0.5)+4.905(0.866)=8.94$ m/s^2

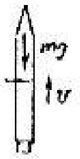
$\theta=\tan^{-1}(5.68/8.94)=\tan^{-1}(0.635)=\underline{32.4^\circ}$

4.66 - قطره باران به هنگام افتادن، نم هوا را می‌گیرد و جرمش بیشتر می‌شود. اگر تندی قطره، v و اصطکاک هوا، R باشد، معادله حرکت آن چیست؟

$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u \qquad \sum F=m\dot{v}+\dot{m}u=d(mv)/dt \qquad \sum F=mg-R$

www.collegeprozheh.ir

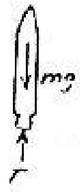
4.67 - موشک کوچکی به جرم m_0 روبه‌بالا پرتاب می‌شود. بگویید جرم موشک چگونه با زمان تغییر کند تا شتاب آن ثابت بماند؟ گازهای با تندی u از شیپوره موشک بیرون می‌زند و اندازه g تغییر چندانی نمی‌کند.



$$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u \;;\; -mg\;\; ma+\dot{m}u \quad -m(a+g)=\dot{m}u \quad u/dt=-m(a+g)$$

$$\int_{m_0}^{m} dm/m=-(a+g)/u\int_0^t dt \quad \ln(m/m_0)=-\frac{a+g}{u}\,t \quad \underline{m=m_0e^{-(a+g)t/u}}$$

4.68 - موشکی به جرم *6000 kg*، گاز برونریز را با تندی *800 m/s* پس می‌زند، اگر مصرف سوخت به گونه‌ای باشد که رانش اندازه حرکت، وزن کاهش یابنده را متعادل سازد، آهنگ مصرف سوخت و مصرف سوخت پس از *10 s* را بیابید.



$$T=mg \quad T=\dot{m}u=-udm/dt \quad -udm/dt=mg \quad \int_{m_0}^{m} dm/m=-\int_0^t gdt/u$$

$$\ln(m/m_0)=-gt/u \quad m=m_0e^{-gt/u}$$

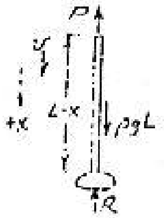
$$\dot{m}=-dm/dt=-m_0(-g/u)e^{-gt/u}=(m_0g/u)e^{-gt/u}$$

$$\underline{\dot{m}=73.6e^{-0.0123t}}\ \text{kg/s}$$

$$m=m_0-m_f \;\text{ so }\; m_0-m_f=m_0e^{-gt/u} \quad m_f=m_0(1-e^{-gt/u})=$$

$$=6000(1-e^{-0.0123\times10})=\underline{592\ \text{kg}}$$

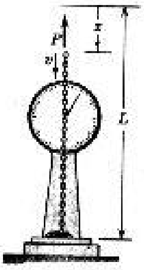
4.69 - چنانکه می‌بینید، نوک زنجیری به طول L و جرم یکه ρ با نیروی P و با تندی یکنواخت v بر یک ترازو می‌ریزد. نیروی نشسته بر ترازو را بر حسب x بیابید.



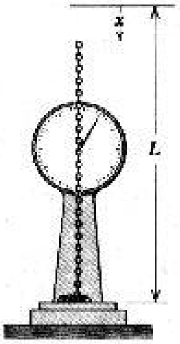
$$\dot{x}=v=\text{const.} \quad P=\rho g(L-x)$$

$$\rho gL-R-\rho g(L-x)=d(\rho[L-x]v)/dt$$

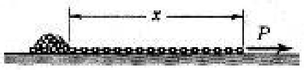
$$\rho gx-R=-\rho v\dot{x}=-\rho v^2 \quad \underline{R=\rho gx+\rho v^2}$$



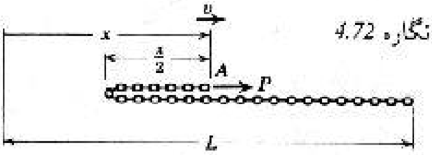
نگاره *4.69*



نگاره *4.70*



نگاره *4.71*

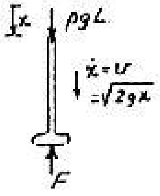


نگاره *4.72*

www.collegeprozheh.ir

4.70 - ته زنجیری به طول L و جرم یکه ρ را چنان می‌گیریم که نوک زنجیر آویخته، به سکوی ترازوی نشان‌داده برسد. سپس آن را رها می‌کنیم. اندازه نیروی نشسته بر ترازو بر حسب x چیست؟

$G_x=\rho(L-x)\sqrt{2gx}=\rho\sqrt{2g}(Lx^{1/2}-3x^{3/2}/2) \quad \sum F_x=\dot{G}_x$



$\rho gL-F=\rho\sqrt{2g}(Lx^{-1/2}-3x^{1/2}/2)\dot{x}=$

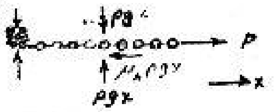
$=\rho\sqrt{2g}((L/2)\sqrt{2g}-(3x/2)\sqrt{2g})=\rho gL-3\rho gx$

$\Rightarrow \underline{F=3\rho gx} \quad R=\dot{m}\Delta v=\rho\dot{x}(\dot{x})=\rho\dot{x}^2=\rho(2gx)=2\rho gx$

$\sum F_x=0 \quad 2\rho gx+\rho gx-F=0 \quad \underline{F=3\rho gx}$

4.71 - سر یک توده زنجیر به جرم یکه ρ را با نیروی ثابت P می‌کشیم. اگر ضریب اصطکاک بین زنجیر و زمین، μ باشد، شتاب زنجیر بر حسب x و $\dot{x}$ چیست؟

$\sum F_x=\dot{G}_x;\ P-\mu_k\rho gx=d(\rho x\dot{x})/dt=\rho(\dot{x}^2+x\ddot{x})$



$a=\ddot{x}=P/\rho x-\mu_k g-\dot{x}^2/x$

$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u \quad P-\mu_k\rho gx=\rho x\ddot{x}+\rho\dot{x}\dot{x} \quad u=\dot{x}$

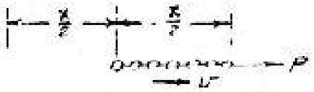
$\underline{a=\ddot{x}=P/\rho x-\mu_k g-\dot{x}^2/x}$

4.72 - زنجیری به طول $L=8\ m$ و جرم $48\ kg$ را بر روی زمین هموار خوابانده‌ایم. نیروی P، زنجیر را بر روی خودش برمی‌گرداند. الف) P چه باشد تا نقطه A با تندی ثابت $1.5\ m/s$ برگردد. ب) اگر در $x=4\ m$ و $P=20\ N$ و $v=1.5\ m/s$ باشد، شتاب نقطه A چیست؟

$\rho=48/8=6\ kg/m$

$\dot{m}=\rho d(x/z)/dt=\rho\dot{x}/2=\rho v/2=6(1.5)/2=4.5\ kg/s$

$u=v=1.5\ m/s \quad \sum F=m\dot{v}+\dot{m}u$



(a) $\dot{v}=0 \quad P=0+4.5(1.5)=\underline{6.75\ N}$

(b) $m=\rho x/2=6(4/2)=12\ kg \quad 20=12\dot{v}+4.5(1.5)$

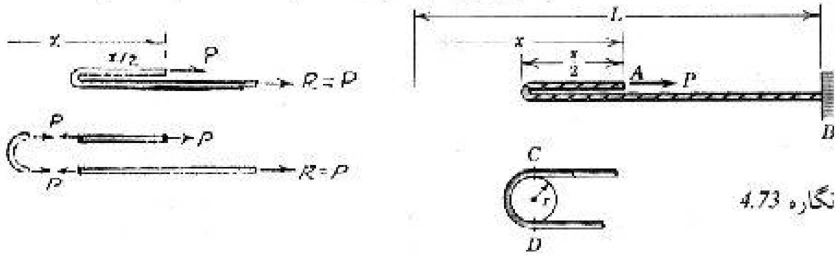
$a=\underline{\dot{v}=1.104\ m/s^2}$

www.collegeprozheh.ir

4.73 - ریسمانی به طول L و چگالی طول ρ را بر زمین هموار خوابانده‌ایم و ته آن را به دیوار بسته‌ایم. نیروی P بر سر A چه باشد تا نوک A با تندی ثابت، روی ریسمان برگردد؟ نقطه تاخوردگی را نیمدایره‌ای به شعاع ناچیز بگیرید.

$$dU=dT \quad Pdx=d(\rho xv^2/4)=(\rho v^2/4)dx \quad \underline{P=\rho v^2/4} \quad \sum F_x=\dot{G}_x$$

$$P+R=d(\rho xv/2)/dt \quad R=\rho v^2/2-\rho v^2/4=\rho v^2/4$$



نگاره 4.73

4.74 - اگر دستور (4.20) را برای بخش متحرک ریسمان پرسش نمونه 4.10 به کار بریم، چرا اندازه P نادرست به‌دست می‌آید. گمان کنید که $\Sigma F=P-\rho gx$ و $m=\rho x$ و $\dot{m}=\rho v$ و $\dot{v}=0$ و $u=v$ است.

$$\sum F=P-\rho gx \quad m=\rho x \quad \dot{m}=\rho v \quad \dot{v}=0 \quad u=v$$

$$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u \quad P-\rho gx=\rho x(0)+\rho v(v)$$

$$P=\rho v^2+\rho gx \quad P=\rho gx+\rho v^2/2 \quad F=\rho v^2/2$$

4.75 - جرم واگن خالی نشان‌داده، 25 Mg است و با تندی 1.2 m/s از زیر قیف زغال‌سنگ می‌گذرد و با آهنگ 4 Mg/s پر می‌شود. واگن چه اندازه پیش رود تا 32 Mg زغال‌سنگ در آن بریزد.

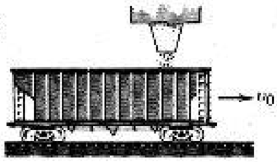
$m_o=$ 25000 kg $\quad \dot{m}=4000$ kg/s

$$\sum F_x=d(mv)/dt \quad 0=d[(m_o+\dot{m}t)v]/dt \quad (m_o+\dot{m}t)a+\dot{m}v=0$$

$$a=dv/dt=-\dot{m}v/(m_o+\dot{m}t), \int_{v_o}^{v} dv/v=-\int_0^t \dot{m}dt/(m_o+\dot{m}t)$$

$$\ln(v/v_o)=-\ln[(m_o+\dot{m}t)/m_o]; v=dx/dt=m_o v_o/(m_o+\dot{m}t)$$

$$\int_0^x dx=m_o v_o\int_0^t dt/(m_o+\dot{m}t)$$



نگاره 4.75

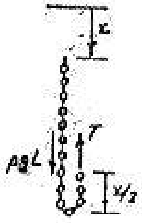
$$x=(m_o v_o/\dot{m})\ln(m_o+\dot{m}t)]_0^t=(m_o v_o/\dot{m})\ln[(m_o+\dot{m}t)/m_o]$$

t=32/4=8 s

www.collegeprozheh.ir

$$x=[25000(1.2)/(4000)]\ln[(25000+4000(8))/25000]=$$
$$=7.5\ln 2.28=\underline{6.18\ \text{m}}$$

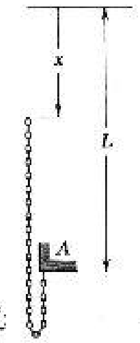
4.76 - سر زنجیر نشان‌داده، از $x=0$ رها می‌شود. نیروی کشش زنجیر در آویزگاه چیست؟ از $x=0$ تا $x=2L$ چه اندازه انرژی از بین می‌رود؟



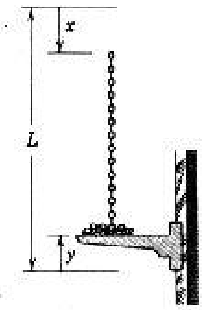
$$\sum F_x=\dot{G}_x \quad \rho gL-T=d(\rho[L-x/2]\dot{x}+0)/dt=\rho(L-x/2)\ddot{x}-\rho\dot{x}^2/2$$

$$\ddot{x}=g \quad \dot{x}^2=2gx \quad \rho gL-T=\rho gL-\rho gx/2-\rho gx \quad \underline{T=3\rho gx/2}$$

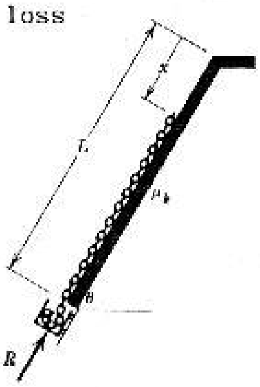
$$\Delta E=|\Delta V_g|=\rho gL(L/2+L/2)=\underline{\rho gL^2} \ \text{energy loss}$$



نگاره 4.76

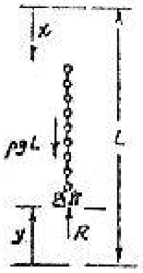


نگاره 4.77



نگاره 4.78

4.77 - نوک زنجیر، از $x=0$ رها می‌شود و در همان هنگام، سکو از $y=0$ با شتاب a بالا می‌آید. پس از t ثانیه، نیروی زنجیر بر سکو چیست؟



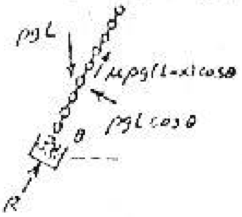
$$\ddot{x}=g \quad \ddot{y}=a \quad G_x=\rho(L-x-y)\dot{x}-\rho(x+y)\dot{y} \quad \dot{x}=gt$$

$$\dot{y}=at \quad x=gt^2/2 \quad y=at^2/2 \quad \sum F_x=\dot{G}_x$$

$$\rho gL-R=\rho[(-\dot{x}-\dot{y})\dot{x}+(L-x-y)\ddot{x}]-\rho[(\dot{x}+\dot{y})\dot{y}+(x+y)\ddot{y}]$$

$$\rho gL-R=-3\rho(a+g)^2t^2/2+\rho gL \quad \underline{R=(3/2)\rho(a+g)^2t^2}$$

4.78 - زنجیر نشان‌داده، از $x=0$ رها می‌شود. اگر ضریب اصطکاک بین زنجیر و شیب، μ باشد، چه اندازه نیروی بیشتر باید به کاسه زیرین بنشانیم تا آن را نگه دارد؟

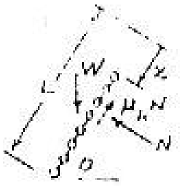


$$\sum F_x=ma_y \quad W\sin\theta-\mu_k N=m\ddot{x}$$

$$\rho g(L-x)\sin\theta-\mu_k\rho g(L-x)\cos\theta=\rho(L-x)\ddot{x}$$

$$\ddot{x}=g\sin\theta-\mu_k g\cos\theta \quad \dot{x}^2=2x\ddot{x}$$

$$\sum F_x=\dot{G}_x \quad \rho gL\sin\theta-\mu_k\rho g(L-x)\cos\theta-R$$



www.collegeprozheh.ir

$=d(\rho[L-x]\dot{x})/dt=\rho(L-x)\ddot{x}-\rho\dot{x}^2=\rho\ddot{x}(L-3x)$

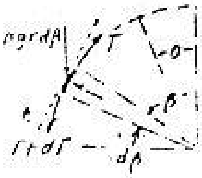
$R=\rho gL\sin\theta-\mu_k\rho g(L-x)\cos\theta-\rho g(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)(L-3x)$

$\underline{R=\rho gx(3\sin\theta-2\mu_k\cos\theta)}$ $\mu_k<\tan\theta$

4.79 - زنجیر نشان‌داده، به طول $\pi r/2$ و چگالی طولی ρ از $\theta=0$ رها می‌شود. شتاب مماسی مشترک ذره‌های زنجیر، بر حسب θ چیست؟ چه اندازه انرژی، از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ ازبین می‌رود.

$\sum F_t=ma_t$

$(T+dT)\cos(d\beta/2)-T\cos(d\beta/2)+\rho grd\beta\sin\beta=\rho rd\beta a_t$

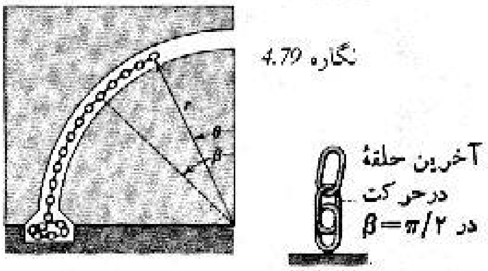


$dT=\rho r(a_t-g\sin\beta)d\beta \quad \int_0^0 dT=\rho r\int_\theta^{\pi/2}(a_t-g\sin\beta)d\beta$

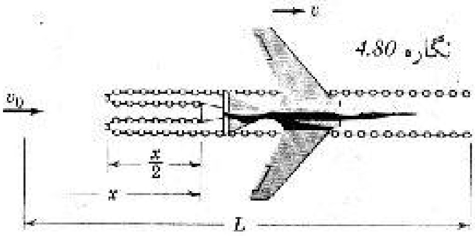
$0=\rho r[a_t\{\pi/2-\theta\}+g\{\cos(\pi/2)-\cos\theta\}]$

$\underline{a_t=g\cos\theta/(\pi/2-\theta)}$ $\quad \Delta E|=|\Delta V_g|=mg\Delta h=(\rho g\pi r\bar{r}/2)\cos45^\circ=$

$=\rho g(\pi r/2)(2r/\pi)=\underline{\rho gr^2}$



نگاره 4.79



نگاره 4.80

4.80 - هواپیمایی که با تندی v_0 فرود می‌آید، با چنگکی که از آن آویخته است، دو زنجیر، هر یک به طول L و چگالی خطی ρ را می‌گیرد. از اصطکاک چشم بپوشید و اندازه تندی هواپیما را هنگامی که همه زنجیر را به حرکت درمی‌آورد برآورد کنید.

$\sum F=0=m\dot{v}+\dot{m}u=$

$=(m+2\rho x/2)\dot{v}+[2d(\rho x/2)/dt]v \quad -(m+\rho x)dv/dt=\rho vdx/dt$

$dv/v=-\rho dx/(m+\rho x) \quad \int_{v_0}^{v}dv/v=-\int_0^x\rho dx/(m+\rho x)$

$\ln(v/v_0)=-\ln[(m+\rho x)/m] \quad v=\frac{v_0}{1+\rho x/m} \quad x=2L$

$\underline{v=\frac{v_0}{1+2\rho L/m}} \quad v=dx/dt \quad \int_0^x(1+\rho x/m)dx=\int_0^t v_0dt$

www.collegeprozheh.ir

$x+\rho x^2/2m=v_o t \quad x^2+(2m/\rho)x-2mv_o t/\rho$

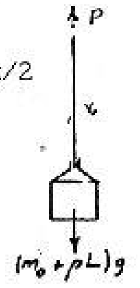
$x=-m/\rho\pm\sqrt{4m^2/\rho^2+8mv_o t/\rho} \quad x=m/\rho[\sqrt{1+2v_o t\rho/m}-1]$

4.81 - استوانه نشان‌داده به جرم m_0 پر از ریسمان است. استوانه از $x=0$ رها می‌شود. هنگام فرود، ریسمان با نیروی اصطکاک F از استوانه بیرون می‌آید. شتاب استوانه و نیروی آویزگاه را بر حسب x و v بیابید.

$U=\Delta T+\Delta V_g \quad U=-Fx$

$\Delta T=(m_o+\rho[L-x])v^2/2 \quad \Delta V_g=-[\{m_o+\rho(L-x)\}x+\rho x^2/2]g$

$-Fx=(m_o+\rho[L-x])v^2/2-[m_o+\rho[L-x/2]]gx$



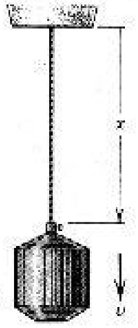
$-Fv=(m_o+\rho[L-x])va-\rho v^3/2-(m_o+\rho[L-x/2])gv+\rho gvx/2$

$[m_o+\rho(L-x)]a=[m_o+\rho(L-x)]g+\rho v^2/2-F$

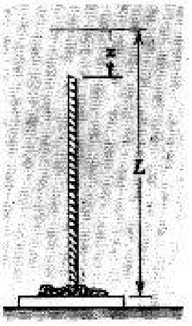
$\Rightarrow \underline{a=g+(\rho v^2/2-F)/(m_o+\rho(L-x))}$

$\sum F_x=\dot{G}_x \quad (m_o+\rho L)g-P=d(m_o+\rho(L-x))v/dt$

$=[m_o+\rho(L-x)]a-\rho v^2 \quad \underline{P=\rho gx+\rho v^2/2+F}$



نگاره 4.81



نگاره 4.82

4.82 - ریسمان نشان‌داده، از $x=0$ رها می‌شود و بر زمین می‌ریزد. نیروی ریسمان بر زمین چیست؟ یافته خود را با پرسش 4.77 هنگامی که سکو تکان نمی‌خورد، روبرو کنید.

$\sum F_x=\dot{G}_x \quad \rho gL-R=d(\rho(L-x)\dot{x}+0)/dt$

$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad \rho(L-x)\dot{x}^2/2=\rho gx(L-x/2)$

$\dot{x}^2=x(2L-x)g/(L-x) \quad \dot{x}(L-x)=x(2L-x)g/\dot{x}$

$\rho gL-R=d(x(2L-x)\rho g/\dot{x})/dt=$

$=2\rho g(L-x)-\rho gx(2L-x)\ddot{x}/\dot{x}^2 \quad \ddot{x}=(1+x(L-x/2)/(L-x)^2)g$

$\rho gL-R=2\rho g(L-x)-\rho gx(2L-x)[1+x(L-x/2)/(L-x)^2]g/\dot{x}^2$

www.collegeprozheh.ir

$R=\rho gx(4L-3x)/2(L-x) \quad R_{a=0} \quad x<2L/3$

4.83 - سر زنجیر نشان‌داده، از سوراخ، پایین می‌افتد و زنجیر به پایین می‌ریزد. تندی زنجیر افتان چه تابعی از x است؟ شتاب زنجیر و اندازه افت انرژی را بیابید. طول زنجیر را L و چگالی طولی آن را ρ بگیرید.

$\sum F=\dot{m}v+\dot{m}u \quad \sum F=\rho gx \quad m=\rho x \quad \dot{m}=\rho v \quad u=v=\dot{x} \quad \rho gx=\rho x\dot{v}+\rho v\dot{x}$

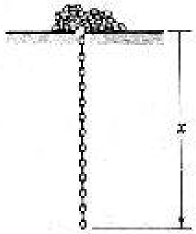
$gxdt=xdv+vdx \quad gxdt=d(xv) \quad gx^2vdt=xvd(xv)$

$gx^2dx=d(xv)^2/2 \quad g\int_0^x x^2dx=\int_0^{(xv)^2} d[xv]^2/2 \quad gx^3/3-(xv)^2/2$

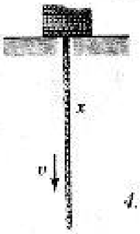
$v=\sqrt{2gx/3} \quad a=\dot{v}=\sqrt{2g/3}\ x^{-1/2}\dot{x}/2$

$\dot{x}=\sqrt{2g/3}\ \sqrt{2gx/3}/(2\sqrt{x})$

$a=g/3 \quad \Delta E=-\Delta V_g-\Delta T=\rho gL^2/2-(\rho L/2)v_{x=L}^2=\rho gL^2/6$

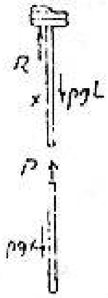


نگاره 4.83



نگاره 4.84

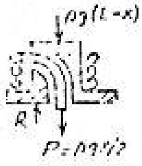
4.84 - زنجیر پرسش پیشین را با چنبره‌ای از ریسمان جانشین کنید. و تندی افتان آن را بیابید و نیروی واکنش سکوی زیر ریسمان را برآورد کنید. چرا در $x=2L/3$ این نیرو صفر می‌شود؟



$\Delta V_g+\Delta T=0 \quad -\rho gx(x/2)+\rho xv^2/2=0 \quad v=\sqrt{gx} \quad a=\dot{v}=g/2$

$\sum F_x=\dot{G}_x \quad \rho gL-R=d(\rho v)/dt=3\rho gx/2 \quad R=\rho gL-3\rho gx/2$

$R=\rho g(L-3x/2)$



$\sum F_x=m(0)+\dot{m}u \quad R=0 \quad x=2L/g \quad \sum F_x=ma_x$

$\rho gx-P=\rho gx/2 \quad P=\rho gx/2 \quad L-x$

$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad \rho gx/2+\rho g(L-x)-R=\rho v(v)=\rho(gx)$

$R=\rho g(x/2+L-x-x)=\rho g(L-3x/2)$

$R=0$ when $x=2L/3 \quad x>2L/3$